УДК 330.43+336.764.2

Моделювання ціноутворення конвертованої облігації

Янішевський В.С.
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри технологій управління
Національного університету «Львівська політехніка»

У статті досліджено модель ціноутворення конвертованої облігації, що ґрунтується на формуванні безризикового портфелю та елементах стохастичного аналізу. Розв'язок рівняння динаміки ціни облігації отримано на основі відомої моделі математичної фізики. Наведено формулу для ціни конвертованої облігації європейського стилю. Побудовано аналітичні вирази, зручні для практичного застосування.
Ключові слова: конвертована облігація, стохастичні рівняння, геометричний броунівський рух, модель Васічека, безризиковий портфель.

Янишевский В.С. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ КОНВЕРТИРУЕМОЙ ОБЛИГАЦИИ
В статье исследована модель ценообразования конвертируемой облигации, основанная на формировании безрискового портфеля и элементах стохастического анализа. Решение уравнения динамики цены облигации получено на основе известной модели математической физики. Приведена формула для цены конвертируемой облигации европейского стиля. Построены аналитические выражения, удобные для практического применения.
Ключевые слова: конвертируемая облигация, стохастические уравнения, геометрическое броуновское движение, модель Васичека, безрисковый портфель.

Yanishevsky V.S. MODELING OF PRICING OF A CONVERTED BOND
A pricing model of convertible bonds, which is based on formation of a risk-free portfolio and elements of stochastic analysis is investigated. A solution to the price bonds dynamic equation was obtained based on known model of mathematical physics. The formula for European-style price of convertible bonds is given. An analytical expressions suitable for practical use where built.
Keywords: convertible bond, stochastic equations, geometric Brownian motion, Vasicek model, risk-free portfolio.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Для аналізу ціноутворення різноманітних фінансових інструментів досить успішно використовуються методи стохастичного аналізу. Як було зауважено ще Башельє, ціна фінансового активу зазнає випадкових змін подібно до броунівського руху. Башельє вперше для моделювання ціни акції використав модель броунівського руху. Значно пізніше, коли відбувся бурхливий розвиток фінансових ринків, погляди Башельє було переглянуто і розвинуто. Так, для моделювання ціни акції більш обґрунтованою виявилася модель геометричного броунівського руху. Важливий етап у моделюванні фінансових інструментів відбувся завдяки Блеку і Шоулзу [1; 2]. Вони вивели рівняння для динаміки ціни і знамениту формулу ціни опціону. При цьому було також сформульовано умову безарбітражності, яка зараз широко використовується під час побудови динаміки різноманітних фінансових інструментів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Із того часу з'явилося чимало моделей, які розвивали та доповнювали наявні [1; 3]. Зокрема, запропоновано моделі стохастичної волатильності, що узагальнювали модель Блека-Шоулза для опціонів. Значні досягнення відбулися в моделюванні цінової динаміки інших фінансових інструментів. Зокрема, вивчення дохідності облігацій, вивчення часової структури процентних ставок облігацій та ін. [3–5].

Як правило, прості та зручні для застосування розв'язки рівнянь цінової динаміки, які є диференціальними рівняннями в частинних похідних декількох змінних, отримуються у небагатьох випадках. До них належать, зокрема, вже згадувана модель Блека-Шоулза, модель Васічека для моделювання дохідності облігацій, які належить також до однофакторних моделей. Здебільшого рівняння стохастичної динаміки для цін активів чи деривативів аналітично можна розв'язати лише наближено або з використанням чисельних методів.

Серед двофакторних моделей, які допускають точний розв'язок, розглядалася модель визначення ціни конвертованої облігації [4; 6; 7]. У зазначеній моделі ціна акції описується моделлю геометричного броунівського руху, а процентна ставка – моделлю Васічека. У роботах [6; 7] використовувався прямий спосіб пошуку розв'язків диференціального рівняння ціни облігації, де рівняння шляхом низки перетворень зводилося до звичайного диференціального рівняння. У роботі [6] наведено функцію Гріна, у роботі [7] виправлено помилки, допущені у [6], проте кінцевої формули для ціни облігації не було наведено.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). У даній роботі для розв'язку зазначеної задачі застосовано підхід, який використовувався в роботі [8], – пошук розв'язку за допомогою аналогій. Він передбачає використання відомих моделей математичної фізики, для яких достатньо вивчено розв'язки і наведено класифікацію про наявність точних розв'язків у задачі. Такий підхід дає змогу отримати більш прості для аналізу вирази та в кінцевому підсумку отримати зручні для використання формули ціни конвертованої облігації.

Виклад основного матеріалу дослідження. Ринкову спот-ціну конвертованої облігації позначимо через $V(r,S,t)$. Вона залежить від процентної ставки і ціни акції в момент часу *t*. Величини $r,\ S$ є випадковими, їх зміна моделюється за допомогою стохастичних рівнянь. Динаміка ціни акції задається рівнянням геометричного броунівського руху:

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dW_1, \qquad (1)$$

де *δ* – волатильність ціни акцій, *μ* позначає дрейф ціни. Стохастична динаміка процентної ставки *r* задається рівнянням:

$$dr = u\, dt + w\, dW_2. \qquad (2)$$

Тут у рівняннях (1) і (2) величини W_1, W_2 є стандартними броунівськими рухами (вінерівськими процесами) з характеристиками:

$$\langle dW_{1,2}\rangle = 0,\ \langle dW_1^2\rangle = \langle dW_2^2\rangle = dt,\ \langle dW_1\, dW_2\rangle = \rho\, dt,$$

де ρ – параметр кореляції ($-1 \le \rho \le 1$).

Для отримання диференціального рівняння динаміки ціни облігації $V(r,S,t)$ використовуються методи стохастичного диференціювання, а також будується відповідний безризиковий портфель, який обирається на основі ідеї безризиковості Блека-Шоулза. Зазначений портфель складається з конвертованої облігації з терміном погашення T_1, кількості Δ_1 безкупонних облігацій із терміном погашення T_2 та Δ_2 базового активу. Таким чином, хеджуються як ризик зміни процентних ставок, так і ризик базового активу. Отже, вказаний портфель рівний

$$\Pi = V - \Delta_1 Z - \Delta_2 S\,.$$

Як показано в [4; 6], вибір величин «дельта» у вигляді:

$$\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial r}\Big/\frac{\partial Z}{\partial r},\ \ \Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial S}$$

визначає утворений портфель безризиковим із процентною ставкою *r*. У результаті після низки перетворень (детальніше див. у [4]) отримуємо рівняння ціни конвертованої облігації

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\,\sigma\, S\, w \frac{\partial^2 V}{\partial S\,\partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} +$$
$$r\, S \frac{\partial V}{\partial S} + (u - \lambda\, w)\frac{\partial V}{\partial r} - r\, V = 0. \qquad (3)$$

Величина λ – ринкова ціна ризику зміни процентної ставки, а $u - \lambda\, w$ – дрейф у рівнянні (2) для процентної ставки з поправкою на ринковий ризик. Рівняння (3) розглядається для часу $t \le T$, де *T* – час погашення облігації. Вибір у рівнянні (2) $u - \lambda\, w = a - b\, r$, $w = c$, де a, b, c – сталі величини, відповідає відомій моделі Васічека [4; 6] для процентної ставки:

$$dr = (a - b\, r)dt + c\, dW_2.$$

Зазначена модель широко використовується під час вивчення часової структури процентних ставок завдяки своїм властивостям. Однак одним із недоліків моделі Васічека є те, що вона допускає можливість від'ємних значень для процентної ставки.

Якщо зробити також перетворення $\tau = T - t$, де τ – час, що залишився до погашення облігації, рівняння (3) для ціни облігації набере вигляду:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\,\sigma\, c\, S \frac{\partial^2 V}{\partial S\,\partial r} +$$
$$+ \frac{1}{2} c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + r\, S \frac{\partial V}{\partial S} + (a - b\, r)\frac{\partial V}{\partial r} - r\, V. \qquad (4)$$

Розв'язок рівняння (4) знаходимо з урахуванням початкової умови в момент $V_0 = V(\tau = 0)$ $(t = T)$. У разі конвертованих облігацій європейського стилю така умова рівна $V_0 = \max(n\, S, P)$, де *S* – ринкова ціна акції, а *P* – номінальна ціна конвертованої облігації, *n* – коефіцієнт конверсії [3; 4].

Функція Гріна рівняння ціни конвертованої акції

У рівнянні (4) зручно перейти до логарифму змінної *S*, увівши змінну $x = \ln(S)$, де $x \in R$. У результаті отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \rho\,\sigma\, c \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial r} + \frac{1}{2} c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} +$$

$$+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial V}{\partial x}+(a-br)\frac{\partial V}{\partial r}-rV. \qquad (5)$$

Наступне спрощення полягає у перетворенні Фур'є для ціни $V(x)$ за змінною *x*:

$$V(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{V}(k)e^{ikx}dk\,.$$

Для Фур'є-зображення $\widetilde{V}(k)$ отримаємо таке рівняння:

$$\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\tau}=\frac{1}{2}c^2\frac{\partial^2\widetilde{V}}{\partial r^2}+\left(ik\rho\sigma c+a-br\right)\frac{\partial\widetilde{V}}{\partial r}-$$

$$-\frac{1}{2}(i+k)\left(k\sigma^2-2ir\right)\widetilde{V}. \qquad (6)$$

Зазначені перетворення дали змогу суттєво спростити рівняння. Ми отримали диференціальне рівняння в частинних похідних параболічного типу, де шукана функція $\widetilde{V}(k)$ і коефіцієнти залежать від змінної *к*. У роботах [6; 7] додатково застосовували також перетворення Лапласа за часовою змінною *τ*, і рівняння (6) зводили до звичайного диференціального рівняння. Наступним кроком розв'язувалося отримане диференціальне рівняння, і на основі знайдених розв'язків будувалася функція Гріна.

Проте пошук розв'язків рівняння (6) можна спростити, використовуючи аналогію з відомими рівняннями математичної фізики. Очевидно, що рівняння (6) за структурою співпадає з рівнянням поширення тепла в математичній фізиці чи рівнянням квантової механіки для уявного часу [9; 10], тому рівняння (6) зведемо до простішого вигляду, щоб з'ясувати існування відомих точних розв'язків чи способи пошуку наближених розв'язків. Досягти цього можна за допомогою заміни змінної і перетворення для функцій. Використання вказаних перетворень здійснюємо для усунення в рівнянні доданку з першою похідною ($\propto\partial\widetilde{V}/\partial r$), а також постійних (не залежних від *r*) доданків у множнику біля $\widetilde{V}$. Цього можна досягнути підстановкою:

$$\widetilde{V}=\exp(\varphi_1(r)+\varphi_0\tau)\widetilde{V}_1\,. \qquad (7)$$

Якщо невідомі функції $\varphi_1(r)$, φ_0 задати наступними:

$$\varphi_1(r)=\frac{b}{2c^2}r^2-r\frac{a}{c^2}\left(1+ik\frac{c\rho\sigma}{a}\right);$$

$$\varphi_0=-\frac{1}{2}k^2(1-\rho^2)\sigma^2-ik\frac{\sigma}{2c}\left(\sigma+\frac{2a\rho}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(b-\frac{a^2}{c^2}\right),$$

то для $\widetilde{V}_1$ отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial\widetilde{V}_1}{\partial\tau}=\frac{c^2}{2}\frac{\partial^2\widetilde{V}_1}{\partial r^2}-\left(\frac{b^2}{2c^2}r^2+Jr\right)\widetilde{V}. \qquad (8)$$

У рівнянні (8) уведено позначення також: $J=\frac{ab}{c^2}-1+ik\left(1+\frac{b}{c}\rho\sigma\right)$.

Отримане рівняння (8) добре вивчене у математичній фізиці й описує осцилятор із лінійним доданком. Розв'язок задачі Коші для цього рівняння можна записати з допомогою функції Гріна, яка відома і має такий вигляд [9]:

$$G_1(\tau,r,r_0,k)=\sqrt{\frac{b}{2\pi c^2\sinh(b\tau)}}\exp\left(\frac{c^2J\tau}{2b^2}\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{Jb\tau}{2c^2\sinh(b\tau)}\left(\cosh(b\tau)\left(\left(r-\frac{c^2J}{b^2}\right)^2+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(r_0-\frac{c^2J}{b^2}\right)^2\right)-2\left(r-\frac{c^2J}{b^2}\right)\left(r_0-\frac{c^2J}{b^2}\right)\right)\right). \qquad (9)$$

Отже, розв'язок рівняння (8) для $\forall\tau>0$ запишемо так:

$$\widetilde{V}_1(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}G_1(\tau,r,r_0,k)\widetilde{V}_1(0)dr_0\,, \qquad (10)$$

де $\widetilde{V}_1(0)$ – значення в початковий момент $\tau=0$ часу.

Інтегрування у формулі (10) поширюється на всю вісь значень $r_0\in R$, а значення процентної ставки, очевидно, слід обирати додатними $r>0$. Використовуючи зв'язок між функціями (7), нескладно записати розв'язок $\widetilde{V}(\tau)$ у вигляді (10) і, відповідно, визначити функцію Гріна рівняння (6):

$$\widetilde{V}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{G}(\tau,r,r_0,k)\widetilde{V}(0)dr_0\,, \qquad (11)$$

де функція Гріна $\widetilde{G}(\tau,r,r_0,k)$ визначається виразом:

$$\widetilde{G}(\tau,r,r_0,k)=\exp(\varphi_0\tau)\exp(\varphi_1(r))G_1(\tau,r,r_0,k)\exp(-\varphi_1(r_0)), \qquad (12)$$

Таким чином, вирази (9) і (12) визначають Фур'є-зображення (за змінною *x*) функції Гріна вихідного рівняння (5) динаміки ціни конвертованої облігації. Відповідно, здійснюючи обернене перетворення Фур'є, знайдемо функцію Гріна рівняння (5). Зауважимо, що оскільки коефіцієнти рівняння (5) не залежать від змінної *x*, функція Гріна рівняння (5) залежить від різниці змінних $x-x_0$.

$$G(\tau,r,r_0,x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{G}(\tau,r,r_0,k)e^{ik(x-x_0)}dk\,, \qquad (13)$$

Як видно зі структури формул (7), залежність від *k* містять функції φ_0 і $\varphi_1(r)$, а також $\widetilde{G}(\tau,r,r_0,k)$ містить залежність від *k* через *J*:

$$J=J_0+ikJ_1,\ J_0=\frac{ab}{c^2}-1,\ J_1=1+\frac{b}{c}\rho\sigma, \qquad (14)$$

У результаті групування відповідних

доданків за степенями *k* отримаємо в показнику експоненти квадратичний многочлен за степенями *k*. Таким чином, підінтегральна функція в (13) є гаусовою за змінною *k*, тому інтеграл обчислюється точно. У результаті після алгебраїчних перетворень і спрощень для функції Гріна $G(\tau, r, r_0, x - x_0)$ отримаємо вираз:

$$G(\tau, r, r_0, x-x_0) = \sqrt{\frac{b}{2\pi c^2 \sinh(b\tau)}} \exp(\phi_1(r, r_0)) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_e^2}}$$

$$\exp\left(-\frac{(x - x_0 + \phi_0(r, r_0))^2}{2\sigma_e^2}\right), \qquad (15)$$

У формулі (15) введено також такі позначення:

$$\sigma_e^2 = (1-\rho^2)\sigma^2\tau + \left(\frac{a}{b}\right)^2 (1-\chi) J_1^2 \tau\ ;$$

$$\phi_0(r, r_0) = \frac{1}{2}(r + r_0) J_1 \chi - \frac{\sigma\rho}{c}(r - r_0) +$$

$$+ J_0 J_1 \left(\frac{c}{b}\right)^2 (1-\chi)\tau - \left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{a}{c}\sigma\rho\right)\tau\ ; \qquad (16)$$

$$\phi_1(r, r_0) = \frac{1}{2}\left(b + \frac{c^2}{b^2} - \frac{2a}{b}\right)\tau - \frac{1}{b}(r - r_0) -$$

$$- \frac{b}{2c^2 \sinh(b\tau)} \left(e^{-\frac{1}{2}b\tau}\left(r - \frac{c^2}{b^2}J_0\right) - e^{\frac{1}{2}b\tau}\left(r_0 - \frac{c^2}{b^2}J_0\right)\right)^2 ;$$

$$\chi = \frac{2}{b\tau}\tanh\left(\tfrac{1}{2}b\tau\right).$$

Неважко переконатися, що отримана функція Гріна рівняння співпадає з такою (з урахуванням відповідних позначень), отриманою в [7]. Проте у даному разі досягнуто більш спрощеної структури щодо залежності від змінних r, r_0, зокрема виразу $\phi_1(r, r_0)$. Зазначене дає змогу досягнути суттєвого спрощення громіздких виразів під час наступних обчислень і отримати достатньо компактну формулу для ціни конвертованої облігації.

Формула ціни конвертованої облігації

Зазначимо, умова щодо ціни облігації в момент погашення *T*, як правило, не містить залежності від процентної ставки (тобто від r_0), тому інтегрування за r_0 виконується лише для самої функції Гріна (15). Спершу можна виконати вказане інтегрування і перейти до наступної функції Гріна $\overline{G}(\tau, r, x - x_0)$:

$$\overline{G}(\tau, r, x - x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau, r, r_0, x - x_0)\, dr_0\,. \qquad (17)$$

Інтегрування у формулі (17) виконати нескладно, оскільки інтеграли визначаються від гаусових функцій за змінною r_0. Певних зусиль потребує спрощення отриманих виразів та надання їм простішої та зручної для застосування структури. У результаті функцію Гріна $\overline{G}(\tau, r, x - x_0)$ запишемо у вигляді:

$$\overline{G}(\tau, r, x - x_0) =$$

$$= F(\tau, r)\frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_e^2}} \exp\left(-\frac{\left(x - x_0 + f(r)\right)^2}{2\Sigma_e^2}\right). \qquad (18)$$

У формулі (18) введено такі позначення:

$$F(\tau, r) = \exp\left(A(\tau) - B(\tau) r\right);$$

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-b\tau}}{b};\ A(\tau) = -\frac{c^2}{4b}B(\tau)^2 + \frac{c^2}{2b^2}\left(1 + 2J_0\right)\left(B(\tau) - \tau\right);$$

$$f(r) = \left(-\frac{c^2}{2}B(\tau)^2 + (a - br)B(\tau)\right)\left(\frac{\rho\sigma}{c} + \frac{J_1\chi}{2}\right) +$$

$$+ J_1 \chi r + \frac{b^2}{c^2} J_0 J_1 (1 - \chi)\tau - \frac{1}{2}\left(\sigma^2 + \frac{2a}{c}\rho\sigma\right);$$

$$\Sigma_e^2 = (1-\rho^2)\sigma^2\tau + \left(\frac{a}{b}\right)^2 (1-\chi) J_1^2 \tau +$$

$$+ \frac{c^2}{8b^2}\left(1 + e^{-b\tau}\right) B(\tau)\left(J_1(b\chi + 2) - 2\right)^2.$$

Позначення інших величин наведено у формулах (14) і (16).

Отриманий компактний вигляд функції Гріна $\overline{G}(\tau, r, x - x_0)$ дає змогу отримати формулу ціни конвертованої облігації. Для цього, як уже вказувалося, слід обчислити інтеграл добутку $\overline{G}(\tau, r, x - x_0)$ і початкової умови (умова задається в момент погашення облігації *T*) для шуканої ціни облігації. Початкову умову зазвичай обирають залежно від конкретної постановки задачі. Легко бачити, зокрема, що для звичайної облігації така умова має вигляд $V_0 = P$, де *P* – номінальна вартість облігації. Тоді інтеграл за x_0 від гаусової функції (18) дорівнює одиниці, і для ціни облігації отримаємо:

$$V(\tau) = P\,F(\tau, r).$$

Нагадаємо, що $\tau = T - t$ – час, що залишився до погашення облігації. Ми отримали відому формулу для дохідності звичайної облігації в моделі, де процентна ставка описується однофакторною моделлю Васічека [3; 4].

Для конвертованих облігацій європейського стилю зазначену умову задамо у вигляді:

$$V_0 = \max(nS, P).$$

Зміст умови очевидний: конвертація відбудеться, якщо ринкова вартість акцій буде перевищувати номінальну ціну облігації. Ціна облігації в довільний момент часу $0 \le t \le T$ визначається таким інтегралом:

$$V(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(\tau, r, x - x_0) \max(n e^{x_0}, P)\, dx_0\,. \qquad (19)$$

Інтервал інтегрування розбивається на дві частини згідно з початковою умовою, й інтеграли, що виникають, виражаються через функції похибок. У результаті для ціни конвертованої облігації отримаємо формулу:

$$V(\tau)=\frac{1}{2}F(\tau,r)\left(e^{f(r)+\frac{1}{2}\Sigma_e^2}nS\left(1+\operatorname{erf}(d_1)\right)+P\left(1-\operatorname{erf}(d_0)\right)\right). \quad (20)$$

де позначено:

$$d_l=\frac{f(r)+\Sigma_e^2\cdot l+\ln(nS/P)}{\sqrt{2}\,\Sigma_e},$$

а $\operatorname{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$, – функція похибок.

Висновки з цього дослідження. Цінова динаміка різноманітних фінансових інструментів моделюється за допомогою стохастичних процесів. У моделі ціноутворення конвертованої облігації стохастичні процеси використовуються для моделювання цінової динаміки облігації і зміни процентної ставки. Для побудови рівняння ціни конвертованої облігації також формується хеджований безризиковий портфель. Отримане таким чином рівняння вивчалося в низці робіт, проте кінцеві формули виявилися достатньо громіздкими і формула для ціни облігації не наводилася.

У даній роботі рівняння ціни конвертованої облігації шляхом низки перетворень зведено до відомого рівняння математичної фізики, для якого відомі також точні розв'язки. У результаті після переходу до Фур'є-зображення за змінною ціни облігації $S(x=\ln(S))$ зменшено порядок диференціального рівняння, коефіцієнти якого залежать від змінної Фур'є *k* як від параметра. Внаслідок подальших перетворень рівняння зведено до диференціального рівняння квантової механіки, що описує систему типу осцилятора. Це дало змогу для аналізу розв'язків рівняння ціни облігації використати відомі результати квантової механіки.

У результаті отримано формулу ціни конвертованої облігації європейського стилю. Показано також, що якщо початкову умову обрати незалежною від ціни облігації, то отримується формула дохідності у моделі Васічека для процентної ставки. Отримані вирази представлено у формі, зручній для практичного застосування.

Очевидно, що для використання наведених формул на практиці необхідно здійснити калібрування, тобто встановити значення вхідних параметрів моделі на основі статистичних даних ринків облігацій. Зазначене та інші завдання, що з ним пов'язані, будуть предметом розгляду в окремій роботі.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Lewis A.L. Option Valuation under Stochastic Volatility / A.L. Lewis. – Finance Press, 2000. – 351 p.
2. Халл Дж.К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты / Дж.К. Халл. – М. : Вильямс, 2013. – 1072 с.
3. Jan De Spiegeleer. The Handbook of Hybrid Securities: Convertible Bonds, CoCo Bonds and Bail-In / Jan De Spiegeleer, Wim Schoutens, Cynthia Van Hulle. – Wiley-Finance, 2014. – 410 p.
4. P. Wilmott. Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering / P. Wilmott. – John Wiley & Sons, Chichester, 1998. – 739 p.
5. Шарп У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бэйли ; пер. с англ. – М. : ИНФРА-М, 2001. – 1028 с.
6. Mallier R. A Green's function for a convertible bond using the Vasicek model / R. Mallier and A.S. Deakin // Journal of Applied Mathematics. – 2002. – vol. 2. – № 5. – P. 219–232.
7. Mallier R. An Analytic Solution for a Vasicek Interest Rate Convertible Bond Model / R. Mallier and A.S. Deakin // Journal of Applied Mathematics. – 2010. – vol. 10. – № 2. – P. 109–113.
8. Янішевський В.С. Рівняння динаміки ціни опціону та моделі квантової механіки / В.С. Янішевський // Журнал фізичних досліджень. – 2014. – Т. 18. – № 1. – С. 1005:1–1005:7.
9. Kleinert H. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics and financial markets / H. Kleinert. – Third edition. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, 2004. – 1932 p.
10. Крылов Г.Г. Точно и квазиточно решаемые модели в квантовой механике и стохастической динамике / Г.Г. Крылов. – Минск : БГУ, 2011. – 131 с.