УДК 330.46

Побудова моделі динаміки розвитку аграрного підприємства у вигляді магістралі росту

Лобода О.М.
кандидат технічних наук,
доцент кафедри прикладної математики та економічної кібернетики
ДВНЗ «Херсонський державний аграрний університет»

Досліджено комплексний метод ідентифікації, пов'язаний із побудовою оптимізаційної моделі, кінцевим результатом якого під час використання знайдених виробничих функцій буде надання рекомендацій для прийняття рішень щодо розподілу засобів між галузями. Встановлено необхідність створення на основі достатніх умов оптимальності моделі оптимального розвитку аграрного підприємства. Розроблено основну характеристику збалансованого росту (магістраль) аграрного підприємства та розглянуто задачу оптимізації моделі з урахуванням запізнювання введення основних виробничих засобів.

Ключові слова: модель, економіко-математичне моделювання, система управління, ідентифікація системи, виробничі функції, оптимізація управління.

Лобода Е.Н. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ АГРАРНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ В ВИДЕ МАГИСТРАЛИ РОСТА

Исследован комплексный метод идентификации, связанный с построением оптимизационной модели, конечным результатом которого при использовании найденных производственных функций будет выработка рекомендаций для принятия решений по распределению средств между отраслями. Установлена необходимость создания на основе достаточных условий оптимальности модели оптимального развития аграрного предприятия. Разработана основная характеристика сбалансированного роста (магистраль) аграрного предприятия и рассмотрена задача оптимизации модели с учетом запаздывания введения основных производственных средств.

Ключевые слова: модель, экономико-математическое моделирование, система управления, идентификация системы, производственные функции, оптимизация управления.

Loboda O.M. BUILDING A MODEL OF THE DYNAMICS OF AGRARIAN ENTERPRISE DEVELOPMENT IN THE FORM OF THE ARTERY GROWTH

The research deals with investigation of the complex identification method that is connected with the construction of an optimization model. The findings may be useful in development of recommendations for decision-making on the allocation of funds between sectors. The necessity of creating the model of optimal development of the agricultural enterprise is established on the basis of sufficient optimal conditions. The basic characteristic of balanced growth (artery) of the agricultural enterprise is developed. The problem of the optimization model is taking into account with the delay of introduction main production facilities.

Keywords: model, economic-mathematical modeling, control system, system identification, production functions, optimization of management.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Забезпечення високого рівня прийняття відповідних рішень у різних напрямах управлінської діяльності аграрного сектору економіки потребує побудови сучасного інформаційного суспільства, що вимагає розроблення, впровадження та використання нових інформаційних технологій. Одним із головних напрямів в умовах складної ринкової економіки є підвищення ефективності функціонування аграрних підприємств, що здійснюється шляхом побудови автоматизованих систем управління та використання сучасних інформаційних технологій. Рішення задачі оптимального управління, в цих умовах, призводить до вирішення завдання управління у вигляді розподілу ресурсів між галузями. Знаходження оптимальних управлінь, що визначають найбільшу ефективність результатів функціонування, передбачає побудову моделей об'єктів управління, а також рішення багатокрокової задачі знаходження оптимальних управлінь за заданого функціоналу ефективності функціонування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Із літературних джерел встановлено, що вирішення проблем управління має особливості, пов'язані з їхньою динамікою, відмінною від стаціонарних станів, а також відіграє надзвичайну роль із погляду прийняття відповідних рішень. Наявні теорії, як правило, розроблялися для того, щоб пояснити ті явища, які вже мали місце в економічній діяльності на мікро- або макроекономічному рівнях [1, с. 10–44]. Вони використовувалися також для того, щоб прогнозувати економічну політику на майбутнє. Але нині відмінність теорії економіки полягає у тому, що рішення, які приймаються на її основі, необхідно негайно впроваджувати в життя, щоб домогтися позитивного ефекту. Виникає безліч проблем, що вимагають глибокого аналізу для прийняття оптимальних або близьких до них рішень і впровадження їх у життя у відносно короткий термін.

У сучасних умовах вимоги до ефективності функціонування підприємства не відповідають можливостям традиційного управління. Дослідження, орієнтоване на створення інформаційних методів і моделей автоматизованих систем управління на базі сучасних комп'ютерних засобів, дає змогу вирішувати завдання вибору управлінських рішень по окремих галузях, а також по господарству в цілому на основі порівняльного аналізу виробничих функцій. Завдання особливо актуальне в умовах ринкової економіки, і спроба вирішувати його в умовах конкуренції, безумовно, може бути використана керівником господарства. Отже, проведення нових досліджень, розроблення моделей, алгоритмів, методів, програм, інформаційних технологій для вдосконалення функціонування підприємств є актуальним науковим завданням.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Головною метою цієї роботи є розроблення моделей об'єктів і процесів управління – динаміки розвитку аграрного підприємства у вигляді магістралі зросту.

Виклад основного матеріалу дослідження. Виробництво – складний керований процес перетворення ресурсів у суспільний продукт. Під час розроблення економіко-математичного апарату для аналізу, планування та прогнозування виробництва створюється система моделей, яка базується на уявленні економіки аграрного підприємств як складної ієрархічної системи [2, с. 130–134]. Під час математичного моделювання взаємозв'язок між факторами виробництва і його результатом зазвичай відображають за допомогою виробничих функцій. Під час побудови виробничих функцій слід мати на увазі, що витрати факторів виробництва на випуск продукції завжди невід'ємні. Крім того, під час моделювання виробничих функцій треба відзначити, що відсутність одного з факторів призводить до нульового випуску продукції. Вважають також, що фактори виробництва змінюються безперервно, а випуск продукції змінюється досить гладко за зміни факторів, що природно під час розгляду виробництва на макрорівні.

Економічно доцільно також, щоб за збільшення кількості використовуваного ресурсу випуск продукції зростав, тобто для диференційованої виробничої функції можна записати такі нерівності [3, с. 162]:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0,$$

де *K* – основні виробничі фонди;

L – трудові ресурси.

Переліченим умовам відповідають мультиплікативні виробничі функції виду:

$$X = aK^{\alpha}L^{\beta}, a > 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

де X – випуск продукції;

α, β – параметри виробничої функції.

Мультиплікативна виробнича функція дає можливість відобразити ефект масштабу виробництва, який існує тільки за одночасної зміни факторів *K* і *L*. Нехай ці фактори змінюються в *λ* разів, тоді:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta} F(K,L).$$

У цьому разі:

1) якщо α+β>1, то має місце інтенсивний засіб розвитку, тобто з ростом масштабу виробництва в *λ* разів випуск продукції зростає більш ніж у *λ* разів;

2) якщо α+β<1, то зростання масштабу виробництва негативно позначається на випуску продукції, тобто зі зростанням витрат у *λ* разів випуск продукції зростає менш ніж у *λ* разів;

3) якщо α+β=1, то відбувається екстенсивне зростання економіки тільки за рахунок факторів виробництва.

Тривалі спостереження показують, що в умовах чисто екстенсивного виробництва збільшення витрат тільки одного з факторів виробництва призводить до зниження ефективності його використання, тобто $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0$. Це означає, що кожна наступна одиниця зростаючого фактору з'єднується з меншою кількістю іншого фактору і його зростання дає зменшення приросту продукції.

Для екстенсивного засобу розвитку характерно $\lim\limits_{K\to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \infty, \lim\limits_{L\to 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \infty,$ і $\lim\limits_{K\to \infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0, \lim\limits_{L\to \infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0$.

Виробнича функція Кобба-Дугласа є моделлю екстенсивного засобу розвитку:

$$X = aK^{\alpha}L^{\beta}, \alpha + \beta = 1,$$

де α – коефіцієнт еластичності випуску по виробничих фондах;

β – коефіцієнт еластичності випуску по фонду оплати праці.

Під еластичністю виробничої функції за фактором розуміється відношення відносного приросту функції до відносного приросту фактору. Еластичність чисельно дорівнює числу відсотків, на яке зміниться випуск продукції за зміни фактора на 1%. Неважко показати, що коефіцієнти еластичності можна визначити як відношення граничної ефективності функції по фактору до середньої ефективності:

$$\alpha = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} \bigg/ \frac{F(K,L)}{K} \text{ і } \beta = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} \bigg/ \frac{F(K,L)}{L}.$$

Важливою характеристикою виробничих функцій є еластичність заміни ресурсів *σ*, оскільки вона буває постійною для більшості виробничих функцій, використовуваних в економіко-математичному моделюванні. Еластичність заміни ресурсів показує, на скільки відсотків змінилася фондоозброєність *k=K/L* за зміни граничної норми заміщення *s=dK/dL* (граничної фондоозброєності) на 1% за незмінного випуску продукції: $\sigma = \left.\frac{d\ln k}{d\ln s}\right|_{F=const}$. Тут під граничною нормою заміщення розуміють кількість фондів, яке необхідно додатково ввести у разі зменшення витрат праці на одиницю, якщо випуск продукції залишиться незмінним. Гранична норма заміщення *s* визначається з рівняння ізокванти (лінія рівного випуску продукції): $dy = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K}dK + \frac{\partial F(K,L)}{\partial L}dL \equiv 0.$

Звідси $s = \frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}}{\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}}$, де $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}$ – гранична ефективність по праці; $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}$ – гранична ефективність по основним виробничим фондам.

Еластичність заміни ресурсів *σ* для функції Кобба-Дугласа дорівнює $\sigma = \frac{d\ln k}{d\ln s} = 1,$ оскільки для неї гранична норма заміщення $S = \frac{1-\alpha}{\alpha}k,$ де $k = K/L.$ Часто економічні міркування підказують, що хоча еластичність заміщення ресурсів і можна вважати постійною, але все-таки вона відмінна від одиниці. У зв'язку із цим еластичність заміни ресурсів для функції Солоу $\sigma = \frac{d\ln k}{d\ln s} = \frac{1}{1+\rho}.$

Розглянемо економіку сільськогосподарського підприємства, що характеризується в кожен момент часу t набором змінних *X, Y, C, K, L, I*, де *X* – інтенсивність валового продукту; *Y* – інтенсивність кінцевого продукту; *C* – невиробниче споживання; *I* – валові капітальні вкладення; *K* – обсяг основних виробничих фондів; *L* – трудові ресурси. Ці змінні взаємопов'язані. Перш за все має місце умова балансу в кожен момент часу *X=aX+Y*, де 0<*a*<1.

Своєю чергою, кінцевий продукт розподіляється на валові капітальні вкладення і невиробниче споживання *Y=I+C*, де валові капітальні вкладення витрачаються на приріст основних виробничих фондів і їх відновлення за рахунок амортизаційних відрахувань: $I = \dot{K} + \mu K$, де μ – коефіцієнт амортизації. Тоді $\dot{K} = I - \mu K$ або:

$$\dot{K} = (1-a)(1-u)X - \mu K\,, \qquad (1)$$

де *u=C/Y* – частка невиробничого споживання:

$$0 \le u \le 1. \qquad (2)$$

Будемо вважати, що розміри валового продукту визначаються заданою виробничою функцією, що характеризує можливості виробництва залежно від величини виробничих фондів *K*, трудових ресурсів і часу t, тобто:

$$0 \le X \le F(K,L,t). \qquad (3)$$

Передбачається, що виробнича функція *F*(*K,L,t*) неперервна і двічі диференційована, причому виконуються такі умови:

1) функція завжди невід'ємна: *F*(*K,L,t*)> 0;

2) функція зростає за кожним з аргументів $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} > 0,\ \ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} > 0\,;$

3) якщо хоча б один із ресурсів *K* або *L* дорівнює нулю, то і *F*(*K,L,t*)=0, *F*(*0,L,t*)=*0*, *F*(*K,0,t*)=*0*;

4) передбачається, що з ростом кожного з аргументів приріст валового продукту зменшується: $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0,\ \ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0\,;$

5) $\lim\limits_{k\to 0}\frac{\partial F}{\partial K} = \infty,\ \lim\limits_{L\to 0}\frac{\partial F}{\partial L} = \infty\,;$

6) функція має властивість однорідності по аргументах *K* і *L*, тобто зміна масштабу виробництва призводить до пропорційної зміни випуску продукту: F(*λK,λL,t*)=*λF*(*K,L,t*). Параметр *t* вводиться у виробничу функцію,

щоб урахувати цілу низку зовнішніх факторів, що впливають на модель, у тому числі вплив науково-технічного прогресу;

7) функція зростає за часом: $\frac{\partial F}{\partial t} > 0.$

Рішення завдання будемо шукати за умови:

$$K \geq K_3, \tag{4}$$

де K_3 – заданий рівень основних виробничих фондів.

Нехай задані виробничі фонди в початковий момент часу:

$$K(0) = K_0. \tag{5}$$

Допустима множина *M* у розглянутій задачі описується умовами (2)–(5). Допустимий процес представлений сукупністю функцій *v*=(*K*(*t*),*X*(*t*),*u*(*f*)), що задовольняє цим умовам. Він описує стан господарства, а *X* і *u* – управління. Очевидно, що такий процес не єдиний.

Задача управління даною економікою господарства полягає у тому, щоб знайти такий процес *v*=(*K*(*t*),*X*(*t*),*u*(*f*)), який забезпечував би найбільше середнє споживання на даному часовому інтервалі з урахуванням дисконтування споживання, тобто $f = \int_0^T e^{-\delta t} \frac{C}{L} dt.$

Проведемо редукцію задачі. Для цього введемо в диференціальне рівняння (1) відносні змінні: *k=K/L* – фондоозброєність, *c=C/L* – середнє споживання, *x=X/L* – продуктивність праці. Оскільки *K=kL*, *X=xL*, то рівняння (1) набуде вигляду $(\dot{kL}) = (1-a)(1-u)xL - \mu kL.$ Ураховуючи правило диференціювання складної функції, одержимо $\dot{K} = (\dot{kL}) = \dot{k}L + k\dot{L}.$

Будемо вважати, що приріст трудових ресурсів здійснюється з постійним темпом, тобто $\dot{L} = nL.$ Тоді $(\dot{kL}) = (\dot{k} + kn)L.$ Остаточно диференціальне рівняння зв'язку у відносних змінних набуде вигляду:

$$k = (1\text{-}a)\,(1\text{-}u)\,x + (\mu + n)\,k.$$

Обмеження на управління *u* залишається, тобто:

$$0 \leq u \leq f, \tag{6}$$

а на продуктивність праці *x* набуде вигляду:

$$0 \leq x = f(k,t), \tag{7}$$

де $f(k,t) = \frac{1}{L}F(K,L,T)$.

Обмеження на виробничі фонди замінимо обмеженнями на фондоозброєність:

$$k(t) \geq k_3(t), \tag{8}$$

$$k(0) = k_0. \tag{9}$$

Проведемо перетворення функціоналу до відносних змінних:

$$f = \int_0^T e^{-\delta t}(1-a)uxdt \to \max \text{ або}$$
$$I = \int_0^T e^{-\delta t}(1-a)uxdt \to \min. \tag{10}$$

Потрібно визначити процес *v*=(*k*(*t*),*u*(*t*),*x*(*t*)), що звертає в мінімум функціонал (10) на безлічі (6)–(9).

Таким чином, у зредукованому завданні станом системи є фондоозброєність *k* управлінням – продуктивність праці *x* і частка споживання *u*. Рівнянням процесу служить диференціальне рівняння зростання фондоозброєності.

Для вирішення поставленого завдання скористаємося теоремою про достатні умови оптимальності. Введемо функцію *R* [4, с. 149]:

$$R(k,x,u,t) = \frac{\partial \varphi(k,t)}{\partial k} = \left[(1-a)(1-u)x - (\mu+n)k\right] +$$
$$+ e^{-\delta t}(1-a)ux + \frac{\partial \varphi(k.t)}{\partial t}$$

де $\varphi(k,t)$ – функція, підібрана з конкретних передумов про тип процесу і необхідного наближення.

Виділимо в *R* складники, що містять компоненти вектору управління (*u,x*), прирівняємо суму коефіцієнтів при ньому до нуля. Тим самим на *φ* накладається вимога -(1-*a*)*φk*+*e*-*δt*(1-*a*)=0; отже, *φk*(*t,k*)=*e-δt*. Тоді *φ*(*t,k*)=*ke*-*t*+*c*(*t*), де *c*(*t*) – довільна функція. Припустимо *c*(*t*)=0, тоді *φ*(*t,k*)=*ke-δt* і *φ*'(*t,k*)=-*δke-δt*.

За цієї умови функція *R* не залежить від *u*: *R*(*t,k,x*)=*e-t*[(1-*a*)*x*(*μ*+*n*)*k*]-*e-δtδk*=*e-δt*[(1-*a*)*x*-(*μ*+*n*+*δ*)*k*]. Оптимальні $\bar{k}(t), \bar{x}(t)$ знайдемо з умови $\bar{k}(t), x(t) \to \max\limits_{0 \leq x \leq f(k,t)} R(t,k,x).$, оскільки *a*<1, то (1-*a*)>0 і, отже, max*R* досягається за *x*=*f*(*k,t*).

Для одногалузевої моделі це рівняння очевидно, але в багатогалузевий моделі може виявитися, що деякі галузі недовантажені.

Проведемо тепер максимізацію *R* по *k* за оптимального $\mathrm{x} = \bar{\mathrm{x}}$. Позначимо: $R_1(t,k) = $ $= \max\limits_{0 \leq x \leq f(k,t)} (t,k,x) = e^{-\delta t}\left[(1-a)f(k,t) - (\mu+n+\delta)k\right].$ Отже, максимум $k = \bar{k}$ буде результатом максимізації R_1 по *k*.

Введемо *r*(*t,k*)=(l-*a*)*f*(*k, t*)-(*μ*+*n*+*δ*)*k*. Тоді, враховуючи, що $e^{-\delta t}$>0, можна записати $\bar{k}(t) = \arg\max\limits_k r(t,k) \forall t \in [0,T].$ Проаналізуємо поведінку функції *r*(*t,k*) по *k*. Ця функція є сумою двох доданків: виробничої функції з точністю до постійного множника і лінійного вираження [5, с. 64–68].

Необхідною умовою максимуму $r(t,k)$ по k є рівність нулю частинної похідної: $\frac{\partial r(t,k)}{\partial k}=0$.

З огляду на те, що $f(k,t)=be^{\rho t}k^{\alpha}$, маємо $(1-a)b\alpha e^{\rho t}k^{\alpha-1}-(\mu+n+\delta)=0$. Оскільки $0<\alpha<1$ і $1-\alpha=\beta$, тоді:

$$\hat{k}(t)=\left(\frac{(1-a)b\alpha}{\mu+n+\delta}\right)^{\frac{1}{\beta}}e^{\frac{\rho}{\beta}t}. \quad (11)$$

Знайдене $\hat{k}(t)$ назвемо магістраллю даної динамічної моделі економіки підприємства. Вона грає важливу роль у структурі оптимального рішення. Управління, що реалізує цю магістраль, знайдемо підстановкою знайденого $\hat{k}(t)$ у диференціальне рівняння розвитку системи (1): $\dot{\hat{k}}(t)=(1-a)(1-u)x(t)-(\mu-n)\hat{k}(t)$. Оскільки $\bar{x}(t)=f(k,t)$, де f(k,t)$=be^{\rho t}k^{\alpha}$ є виробничою функцією, то, вирішуючи рівняння процесу щодо u, отримаємо $\hat{u}(t)=1-\frac{\dot{\hat{k}}(t)-(\mu+n)\dot{\hat{k}}(t)}{(1-a)be^{\rho t}\hat{k}^{\alpha}}$.

Із формули (11) знайдемо $\dot{\hat{k}}(t)=\hat{k}(t)\frac{\rho}{\beta}$. Тоді $\hat{u}(t)=1-\frac{\hat{k}(t)\left(\mu+n+\frac{\rho}{\beta}\right)}{(1-a)be^{\rho t}\hat{k}^{\alpha}}$. Або $\hat{u}(t)=1-\frac{\mu+n+\frac{\rho}{\beta}}{(1-a)be^{\rho t}\hat{k}^{\alpha}}$.

Оскільки $\hat{k}^{\alpha-1}=k^{-\beta}=\left(\frac{(1-a)b\alpha}{\mu+n+\delta}\right)^{-1}e^{-\rho t}$, то отримаємо оптимальне управління:

$$\hat{u}(t)=1-\alpha\frac{\mu+n+\frac{\rho}{\beta}}{\mu+n+\delta} \quad (12)$$

у припущенні, що $0\le\hat{u}\le1$.

Розглянемо спеціальний випадок, коли крайові умови лежать на магістралі:

$$k_0=\hat{k}(0),k_1=\hat{k}(T). \quad (13)$$

Тоді процес $\hat{v}=(\hat{k},\hat{u},f(k))\in M$ оптимальний. Дійсно, цей процес забезпечує максимум R за кожного t:

а) по u – у силу незалежності R від управління u, що досягається вибором функції $\varphi(k,t)$;

б) по k і x – із побудови.

З іншого боку, $\hat{v}$ представляє допустимий процес, оскільки:

а) задовольняє рівняння процесу (u знаходили підстановкою $\hat{k}$ у рівняння процесу);

б) $0\le u\le1$;

в) граничні умови були спеціально підібрані.

Відзначимо, що умови реалізованості $0\le u\le1$ у даній задачі виконується. Це можна перевірити. Для функції Кобба-Дугласа економічної магістраллю є крива постійного темпу зростання фондоозброєності, пропорційного темпу зростання технічного прогресу ρ, а оптимальне керування, що реалізує дану магістраль, постійна величина (12).

Таким чином, для спеціально підібраних крайових умов (13) магістраль є оптимальним режимом розвитку економіки господарства: $\hat{k}(t)=\arg\max\limits_{-\infty<k<\infty}R(t,k)$. У всіх випадках магістралі в структурі рішення відводиться суттєва роль. Насправді дуже рідко зустрічаються випадки, коли крайові умови належать магістралі. Розглянемо загальний випадок. Нехай $k_0\ne\hat{k}(0),k_1\ne\hat{k}(T)$. Для вирішення цього завдання можна застосувати прийом, аналогічний вирішенню завдання лінійної щодо управління. Знайдемо $\bar{k}(t)=\arg\max\limits_{k\in\tilde{V}_b^t}R(t,k)$.

У реальних економічних задачах мінімальний рівень споживання строго позитивний: $0<u_1\le u\le1$.

Побудуємо границі $\gamma_{ij}(t)$, i=1,2, j=0,1, допустимої області V. Функції $\gamma_{ij}(t)$ є рішеннями диференціального рівняння процесу:

$$\dot{k}=(1-a)(1-u)f(t,k)-(\mu+n)k \quad (14)$$

за відповідних крайових умов (якщо j=0, то береться $k(0)=k_0$, якщо j=1, то використовується $k(T)=k_1$) і обмеженнях на керування (якщо i=1, то береться нижня межа $u=u_1$, якщо i=2, то u=1).

Розглянемо приклад, коли $k_0<\hat{k}(0),k_1(T)>\hat{k}(T)$, тоді оптимальна траєкторія буде складатися з трьох ділянок із моментами перемикання τ_1 і τ_2, де τ_1 є точкою перетину границі γ_{10} з магістраллю $\hat{k}(t)$, а τ_2 – точкою перетину магістралі $\hat{k}(t)$ з границею γ_{11}. Спочатку на тимчасовому інтервалі $(0,\tau_1)$ майже все вкладається в накопичення (споживання у цей період на мінімальному рівні u_1). Починаючи з τ_1 розвиток іде по магістралі $\hat{k}(t)$ аж до моменту τ_2, з якого знову майже все вкладається в економіку (споживання знову знаходиться на нижньому рівні u_1).

Знайдемо рішення диференціального рівняння (14). З огляду на те, що $f(t)=be^{\rho t}k^{\alpha}$, отримаємо:

$$\dot{k}=(1-a)(1-u)be^{\rho t}k^{\alpha}-(\mu+n)k. \quad (15)$$

Перепишемо рівняння (15) у вигляді:

$$\dot{k}+\lambda k=b(1-a)(1-u)e^{\rho t}k^{\alpha}, \quad (16)$$

де λ=μ+*n*

Введемо нову змінну $z=k^{\beta}$, де $\beta=1-\alpha$. Оскільки $\dot{z}=(1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k}$, то маємо:

$$\dot{k}=\frac{k^{\alpha}}{(1-\alpha)}\dot{z}. \qquad (17)$$

Підставляючи (17) у диференціальне рівняння (16), отримуємо:

$$(1-\alpha)^{-1}k^{\alpha}\dot{z}+\lambda k=b(1-a)(1-u)e^{\rho t}k^{\alpha}. \quad (18)$$

Розділивши обидві частини диференціального рівняння (18) на k^{α}, отримаємо:

$$(1-\alpha)^{-1}\dot{z}+\lambda z=b(1-a)(1-u)e^{\rho t}. \quad (19)$$

Загальне рішення лінійного неоднорідного диференціального рівняння дорівнює сумі загального рішення однорідного диференціального рівняння z_{00} і частинного рішення неоднорідного рівняння $Z_{чн}$:$Z=Z_{00}+Z_{чн}$. Знайдемо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $(1-\alpha)^{-1}z+\lambda z=0$, характеристичним рівнянням, якого є $(1-\alpha)^{-1}q+\lambda=0$. Звідси – визначимо корінь характеристичного рівняння: $q=-\lambda\beta$. Тоді загальне рішення однорідного диференціального рівняння набуде вигляду $z_{00}=C_j e^{-\lambda\beta t}$, i=0,1.

Частинне рішення неоднорідного диференціального рівняння шукаємо у вигляді правої частини (19):

$$z_{чн}=Be^{\rho t}, \qquad (20)$$

де *B* – невизначений коефіцієнт, який підлягає визначенню.

Диференціюючи (20) його по *t*, отримаємо $\dot{z}_{чн}=B\rho e^{\rho t}$. Підставами $z_{чн}(t)$ в рівняння (19): $(1-\alpha)^{-1}B\rho e^{\rho t}+\lambda Be^{\rho t}=b(1-a)(1-u)e^{\rho t}$. Після скорочення на e^{pt} отримаємо $(1-\alpha)^{-1}B\rho+\lambda B=b(1-a)(1-u)$. Звідси – $B=\dfrac{b(1-a)(1-u)}{\rho/\beta+\lambda}$.

Тоді загальне рішення неоднорідного диференціального рівняння (19) має вигляд $z_{00}(t)=C_j e^{-\lambda\beta t}+\dfrac{b(1-a)(1-u)}{\rho/\beta+\lambda}e^{\rho t}$. Оскільки $z=\dfrac{1}{k^{\alpha-1}}=k^{\beta}$, тобто $k=z^{1/\beta}$, то загальне рішення диференціального рівняння (16) буде мати вигляд $k(t)=\left[C_j e^{-\lambda\beta t}+\dfrac{b(1-a)(1-u)}{\rho/\beta+\lambda}\rho t\right]^{1/\beta}$, де j = 0,1.

Визначимо умови для моментів перемикання. За визначенням γ_{ij}, i=1, j=0,1 є границями допустимої області $\tilde{V}^t$ та виходять як частинні рішення диференціального рівняння (16) за заміни *u* на граничні значення u_i, i=1,2 і вибору C_j, j=0,1 залежно від крайової умови. Тоді $\gamma_{ij}(C_j,u_j,t)=\left[C_j e^{-\lambda\beta t}+\dfrac{b(1-a)(1-u)}{\rho/\beta+\lambda}e^{\rho t}\right]^{1/\beta}$, де i=1,2, j=0,1.

Знайдемо інтегральні константи $C_{j,j}$=0,1 залежно від граничних умов. Оскільки

$$k_0=k(0)=\gamma_{i0}(C_0,u,0)=\left[C_0+\frac{b(1-a)(1-u_i)}{\rho/\beta+\lambda}\right]^{1/\beta},$$

то $C_0=k_0-\dfrac{b(1-a)(1-u)}{\rho/\beta+\lambda}$. Аналогічно визначаємо C_1 з граничної умови $k_1=k(T)=\gamma_{i1}(C_1,u_i,T)=$

$$=\left[C_1 e^{-\lambda\beta t}+\frac{b(1-a)(1-u)}{\rho/\beta+\lambda}e^{\rho T},\right]^{1/\beta}.$$

Отримуючи $C_1=\left[k_1^{\beta}-\dfrac{b(1-a)(1-u_i)}{\rho/\beta+\lambda}e^{\rho T}\right]e^{\lambda\beta T}$, знайдемо точки перемикання. Позначимо через τ_{ij}, i = 1,2, j = 0,1, точки перетину границь γ_{ij}, i = 1,2, j = 0,1, з магістраллю $\hat{k}(t)$ Моменти перемикання τ_{ij} отримаємо, прирівнявши $\hat{k}(t_{ij})=\lambda_{ij}(C_j,u_i,t)$, отримаємо

$$\left(\frac{(1-a)b\alpha}{\mu+n+\delta}\right)^{1/\beta}e^{\frac{\rho}{\beta}t}=\left[C_j e^{-\lambda\beta t}+\frac{b(1-a)(1-u_i)}{\rho/\beta+\lambda}e^{\rho t}\right]^{1/\beta}.$$

Звідси: $\dfrac{(1-a)b\alpha}{\mu+n+\delta}e^{\rho t}=C_j e^{-\lambda\beta t}+\dfrac{b(1-a)(1-u_i)}{\rho/\beta+\lambda}e^{\rho t}$.

Висновки з цього дослідження. Економічні моделі дають змогу виявити зміни зведених показників і дають цінну інформацію про темпи і пропорції розвитку господарства. У статті показано необхідність адаптації та доопрацювання моделей і методів управління аграрними підприємствами, використовуючи як керуючий вплив обсяг інвестицій, а також зроблено уточнення моделі запізнювання під час освоєння капітальних вкладень. Установлено необхідність створення на основі достатніх умов оптимальності моделі оптимального розвитку аграрного підприємства, що дало змогу розробити основну характеристику збалансованого зростання (магістраль) аграрного підприємства та розглянуто задачу оптимізації моделі з урахуванням запізнювання введення основних виробничих засобів, вибираючи критерієм оптимальності, загальним для будь-якої економіки, максимум споживання.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Марасанов В.В. Основи теорії проектування і оптимізації макроекономічних систем / В.В. Марасанов, О.М. Пляшкевич. – Херсон : Айлант, 2002. – 190 с.

2. Лобода О.М. Актуальні проблеми ідентифікації та моделювання структури управління підприємством / О.М. Лобода, Н.В. Кириченко // Наука й економіка. – 2015. – № 3. – С. 130–134.

3. Вітлінський В.В. Моделювання економіки : [навч. посіб.] / В.В. Вітлінський. – К. : КНЕУ, 2003. – 408 с.

4. Стеценко І.В. Моделювання систем / І.В. Стеценко. – Черкаси : ЧДТУ, 2010. – 399 с.

5. Лобода О.М. Вирішення задачі ідентифікації структури управління підприємства / О.М. Лобода // Сучасна спеціальна техніка. – 2012. – № 3. – С. 64–68.