

DOI: <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2025-81-16>

УДК 330.43+336.764.2

МОДЕЛЬ ГЕСТОНА ІЗ СТОХАСТИЧНОЮ ВІДСОТКОВОЮ СТАВКОЮ

HESTON MODEL WITH A STOCHASTIC INTEREST RATE

Янішевський Василь Степановичкандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри прикладної математики,
Національного університету «Львівська політехніка»
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0449-6686>**Михайлинин Максим Васильович**бакалавр,
Національного університету «Львівська політехніка»
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3773-4601>**Yanishevskiy Vasyl, Mykhailynyn Maksym**

Lviv Polytechnic National University

Розглянуто гібридну модель Гестона, що враховує стохастичну динаміку відсоткової ставки, яка задана процесом Кокса-Інгерсолла-Росса (KIP). Проаналізовано випадок точного розв'язку моделі Гестона-KIP, а саме за відсутності кореляції процесу Вінера відсоткової ставки з процесами Вінера класичної моделі Гестона. Використано розв'язок моделі Гестона-KIP для ціни європейського опціону кол, який за структурою відповідає класичній моделі Гестона. Наведено формулу ціни опціону у формі зручній для аналітичного та чисельного аналізу. Здійснено чисельний аналіз впливу стохастичної динаміки відсоткової ставки на ціну європейського опціону кол порівняно з класичною моделлю Гестона. Для заданого набору параметрів показано, що в моделі Гестона-KIP для тривалих опціонів ціна помітно відрізняється від такої ж знайденою за класичною моделлю Гестона.

Ключові слова: стохастичні рівняння, броунівський рух, процес Кокса-Інгерсолла-Росса, ціна опціону, модель Блека-Шоулза, модель Гестона, модель Гестона-KIP.

The well-known Black–Scholes model is based on the assumptions of constant asset-price volatility and a constant interest rate, which contradicts the dynamics observed in modern financial markets. In comparison with the Black–Scholes framework, the classical Heston model incorporates stochastic asset-price volatility; however, it still relies on the assumption of a constant interest rate. The stochastic volatility model developed by Heston removes one of the main limitations of the Black–Scholes model. Therefore, constructing models that account for the stochastic dynamics of interest rates is essential. The CIR stochastic process has become a benchmark in modeling interest rates. A distinctive feature of the CIR model is that interest rates never become negative, unlike in the Vasicek model. Given the advantages of both the Heston and CIR frameworks, a so-called hybrid version – the Heston-CIR model – has been developed. In this work, we consider the Heston-CIR model, where both the asset-price volatility and the dynamics of the interest rate are driven by a CIR stochastic process. The CIR model possesses important properties such as mean reversion and the non-negativity of the stochastic variable. Furthermore, under certain conditions, the Heston-CIR model admits analytical solutions, which simplifies model calibration using market data and enhances its practical applicability. The probability distribution of the asset price and a closed-form option pricing formula for this model were derived in the author's previous work. The resulting formula for the price of a European option is presented in a form convenient for numerical computation. We also examine the impact of the stochastic interest rate on option prices by comparing the results with the standard Heston model. Exact solutions for the Heston-CIR model are employed, which apply in the case of zero correlation between the Wiener process in the interest-rate equation and the other Wiener processes in the model. Based on the exact solution, a pricing formula for a European call option is constructed. A numerical study is carried out to investigate the dependence of the option price on its maturity for a given set of model parameters, along with a comparison to the ordinary Heston model. A clear deviation of the option price in this model from the classical Heston model is observed as the option maturity increases.

Keywords: stochastic equations, Brownian motion, process Cox-Ingersoll-Ross, option pricing, Black-Scholes model, Heston model, Heston-CIR model.



Постановка проблеми. У дослідженнях фінансів важливе значення має взаємозв'язок між ціноутворенням активів та управлінням ризиками. Розробка моделей стохастичної волатильності ціноутворення активів передбачає також досягнення певного компромісу між правильним описом цінової динаміки та прийнятною складністю калібрування моделей. Важливість стохастичних моделей волатильності [1; 2] також впливає зі спостереження, що волатильність цін активів, які розглядають як дані часових рядів, виявляє стохастичну природу. Розподіл ймовірностей цін активів, який отримується на основі моделі, повинен відповідати спостережуваним даним і модель має описувати також ціноутворення похідних інструментів та хеджування.

Відома модель Блека-Шоулза [3] ґрунтується на припущеннях про постійні волатильність ціни активу і відсоткову ставку, що суперечить динаміці сучасних фінансових ринків. Яскравим прикладом є стохастична природа волатильності фінансового активу, яка виявляється в «усмішці» волатильності [4]. Класична модель Гестона порівняно з моделлю Блека-Шоулза розглядає стохастичну волатильність ціни активу, однак припущення про постійну відсоткову ставку залишається.

В останні роки було розроблено чимало стохастичних моделей волатильності [5]. Зокрема розширені моделі Гестона із врахуванням стохастичної відсоткової ставки, стохастичної кореляції та інших. Зауважимо також, що додавання стохастичних процесів для факторів моделі суттєво ускладнює ці моделі [6], для яких неможливо отримати замкнуті формули для розподілів ймовірностей цін активів та цін опціонів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В моделі Блека-Шоулза ціна базового активу задається геометричним броунівським рухом і модель вперше була застосована для розрахунку цін європейських опціонів. Проте, як ми вже зазначали, припущення моделі про сталість волатильності ціни активу та відсоткової ставки суперечать ринковій реальності. Для покращення результатів багато авторів розвивали модифіковану стратегію Блека-Шоулза, яка включає стохастичну волатильність [7]. Модель стохастичної волатильності розроблена Гестоном [1] усуває одне з обмежень моделі Блека-Шоулза.

Відсоткові ставки впливають на вартість багатьох важливих активів, цінних паперів зокрема. Тому побудова моделей, що врахо-

вують стохастичну динаміку відсоткових ставок є важливою. У ряді досліджень [8-14] відсоткова ставка як і волатильність ціни активу задаються стохастичними процесами. Так розширення моделі Гестона за допомогою додаткового процесу Кокса-Інгерсолла-Росса (KIP) для відсоткової ставки було запропоновано Сіппелем та Окоші [15].

Стохастичний процес KIP став певним еталоном в моделюванні відсоткових ставок [16]. Характерною особливістю моделі KIP є те, що відсоткові ставки ніколи не набувають від'ємних значень на відміну від моделі Васічека. Проте запропоновані моделі часто не мають розв'язків у замкнутій формі, тому використовуються також чисельні методи для побудови розв'язків [17].

Враховуючи переваги моделей Гестона та KIP розроблена так звана їх гібридна версія – модель Гестона- KIP [17; 18-21]. Застосування вказаної моделі до ціноутворення американських опціонів наведено в [22].

Включення стохастичної відсоткової ставки до стохастичних моделей волатильності для формування гібридних моделей є одним з найпопулярніших підходів. Існує також чимало емпіричних фактів, які свідчать, що введення стохастичної відсоткової ставки в моделі ціноутворення опціонів приводить до покращення моделі [23; 24]. Зокрема, у роботі [9] прийнято комбінацію корельованої моделі Штейна-Штейна [7] та моделі відсоткової ставки Халла-Уайта [25] з європейськими опціонами. Крім того, наведені формули апроксимації для цін європейських опціонів, коли базова ціна відповідає стохастичній моделі волатильності Гестона з відсотковою ставкою заданою моделлю KIP [17].

Постановка задачі. У цій роботі ми розглядаємо модель Гестона-KIP, де волатильність ціни активу та зміна відсоткової ставки задаються стохастичним процесом KIP [12]. Як ми зазначали, модель KIP володіє важливими властивостями як повернення величини до середнього значення та невід'ємності випадкової величини. Крім того, за певних умов вказана модель Гестона-KIP володіє аналітичними розв'язками, що спрощує калібрування моделі з використанням ринкових даних та сприяє практичному застосуванню моделі.

Розподіл ймовірностей ціни активу та формулу ціни опціону у замкнутій формі для даної моделі знайдені у роботі автора [26]. Формула для ціни європейського опціону записана у формі зручній для проведення чисельних розрахунків. Ми досліджуємо також вплив сто-

хастичної відсоткової ставки на ціни опціонів шляхом порівняння з моделлю Гестона.

Виклад основного матеріалу дослідження. Модель Гестона-KIP враховує стохастичну динаміку відсоткової ставки, яку задаємо додатковим стохастичним рівнянням KIP:

$$\begin{aligned} dS(\tau) &= r(\tau)S(\tau)d\tau + S(\tau)\sqrt{V(\tau)}dW_s(\tau), \\ dV(\tau) &= \kappa(\theta - V(\tau))d\tau + \sigma_v\sqrt{V(\tau)}dW_v(\tau), \\ dr(\tau) &= \beta(\mu - r(\tau))d\tau + \sigma_r\sqrt{r(\tau)}dW_r(\tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Вважаємо, що кореляція має місце між вінерівськими процесами ціни активу та волатильності $dW_s(\tau)dW_v(\tau) = \rho d\tau$, а також процес $dW_r(\tau)$ не корелює з процесами Вінера попередніх рівнянь $dW_i(\tau)dW_r(\tau) = 0$, $i = s, v$.

Для заданої моделі Гестона зі стохастичною відсотковою ставкою, ціну європейського опціону кол (далі скорочено опціону) запишемо так [26: 27]

$$C(t) = e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} F_C(S), \quad (2)$$

де $\langle \dots \rangle$ позначає усереднення за всіма стохастичними процесами; $F_C(S) = (S - K)^+$ – платіжна функція, індекс $(\dots)^+$ вказує на умову виконання опціону $S \geq K$, K – ціна виконання опціону (страйк ціна).

В роботі [26] для ціни опціону було отримано формулу

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, t) (S_0 e^x - K)^+ dx, \quad (3)$$

де змінна $x = \ln\left(\frac{S}{S_0}\right)$, а функція $F(x, t)$ визначена інтегралом Фур'є:

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(k, t) e^{ikx} dk, \quad (4)$$

Тут введені такі позначення:

$$\gamma = \kappa + ikr\sigma_v, \alpha = \frac{2\theta\kappa}{\sigma_v^2}, \omega = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + k(k-i)\sigma_v^2},$$

$$\omega_r = \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 2(1+ik)\sigma_r^2}, \alpha_r = \frac{2\beta\mu}{\sigma_r^2}.$$

Величини S_0, V_0, r_0 задають початкові значення (в момент часу t_0) ціни активу, волатильності ціни активу та відсоткової ставки відповідно.

Зазначимо, що в роботі [28] була розглянута розширена модель Гестона з процесом Васічека для відсоткової ставки. Для ціни опціону за формулою типу (3) отримано вираз, який містить часову структуру відсоткової ставки і

усереднення ефективної платіжної функції за густиною умовної ймовірності моделі Гестона. Такий запис дозволяє більш наочно тлумачити вплив стохастичної відсоткової ставки на ціну опціону в порівнянні з класичною моделлю Гестона. Подібним чином можна записати також формулу ціни опціону (2) з стохастичним процесом KIP для відсоткової ставки. Проте в даній роботі ми скористаємось іншим способом, де у формулі (2) виконаємо інтегрування за змінною x і в результаті отримаємо для ціни опціону вираз

$$C(t) = S_0 P_1 - K P_2, \quad (5)$$

де позначено множники:

$$P_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{F}(k, t)}{ik} e^{ik \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)} dk \quad (6)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \tilde{F}(0, t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{F}(k + i, t)}{ik} e^{ik \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)} dk$$

Тут величина $\tilde{F}(0, t)$ визначає часову структуру відсоткової ставки в моделі KIP [26]

$$\tilde{F}(0, t) = e^{\frac{1}{2}(\alpha_r \beta + \alpha \gamma)(t-t_0)} e^{-\frac{1}{2}(\alpha_r \beta + \alpha \gamma)(t-t_0)}$$

$$\frac{2r_0}{\beta + 2\omega_0 \coth(\omega_0(t-t_0))} \left(\cosh(\omega_0(t-t_0)) + \frac{\beta \sinh(\omega_0(t-t_0))}{2\omega_0} \right)^{-\alpha_r}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 2\sigma_r^2}.$$

Інтеграли у формулах (6) розглядаються в сенсі головного значення.

Формула ціни опціону (5) має типову структуру для класичної моделі Гестона. У випадку сталої відсоткової ставки $\tilde{F}(0, t) = e^{-r_0(t-t_0)}$ і формула (5) перейде у відповідні вирази класичної моделі Гестона. Наведена формула ціни опціону має переваги порівняно з такою ж роботи [27], оскільки підінтегральні вирази у (6) задані елементарними функціями, в той час як вирази у формулі ціни опціону [27] містять нескінченні ряди.

Виконаємо чисельний аналіз отриманої формули для опціону (5) для заданого набору параметрів моделі. Покажемо також різницю між гібридною моделлю Гестона-KIP та класичною моделлю Гестона, щоб продемонструвати вплив стохастичної відсоткової ставки на ціну опціону.

Набір параметрів для моделі Гестона-KIP повинен задовольняти умови невід'ємності $\frac{2\theta\kappa}{\sigma_v^2} > 1$, $\frac{2\beta\mu}{\sigma_r^2} > 1$ для волатильності $V(\tau)$ і відсоткової ставки $r(\tau)$ стохастичних процесів.

Вказані умови задають обмеження на величини волатильностей $V(\tau)$ і $r(\tau)$, для яких модель застосовна.

Задаймо значення параметрів для чисельних розрахунків (таблиця 1). Останні три параметри (β, μ, σ_r) відносяться лише до моделі Гестона-KIP. Крім того задамо значення початкової ціни активу $S_0 = 1$ та страйк-ціни $K = 1$ (в умовних одиницях).

Для набору параметрів моделі заданих в табл. 1 розрахуємо ціну опціону за формулою (5) в залежності від часу до виконання опціону T (роки). Для порівняння також наведемо відповідну ціну опціону для класичної моделі Гестона (рис. 1).

Як видно з рис. 1 зі збільшенням часу до виконання опціону T ціна опціону в моделі Гестона-KIP дещо зростає. Це узгоджується з твердженням, що для довготривалих опціонів моделі зі стохастичною відсотковою ставкою є більш придатними. Отримана формула для ціни опціону (5), (6) дозволяє також розв'язувати оптимізаційні задачі з калібрування моделі і відповідно застосовувати до аналізу статистичних даних ринку деривативів.

Висновки. Досліджена гібридна модель Гестона-KIP в якій відсоткова ставка описується стохастичним процесом KIP. Вказана модель усуває обмеження класичної моделі Гестона про сталість відсоткової ставки. Таке припущення суперечить ринковим даним про ціноутворення активів та деривативів. Використано точні розв'язки для моделі Гестона-KIP, які мають місце у випадку відсутності кореляції між процесом Вінера рівняння відсоткової ставки та іншими процесами Вінера моделі. На основі точного розв'язку побудована формула для ціни європейського опціону кол. Проведено чисельне дослідження залежності ціни опціону від його тривалості для заданого набору параметрів моделі та наведене порівняння із звичайною моделлю Гестона. Наочно спостерігається відхилення ціни опціону в даній моделі від класичної моделі Гестона зі збільшенням тривалості опціонів. Наведені результати будуть також корисними для калібрування моделі та аналізу статистичних даних фондових ринків на її основі. Ця та інші пов'язані задачі будуть предметом окремої роботи.

Таблиця 1

Значення параметрів моделей для чисельних розрахунків

V_0	κ	$\tilde{A}_v$	θ	ρ	r_0	β	μ	σ_r
0.1	0.4	0.1	0.25	0.9	0.2	0.5	0.3	0.2

Джерело: сформовано авторами

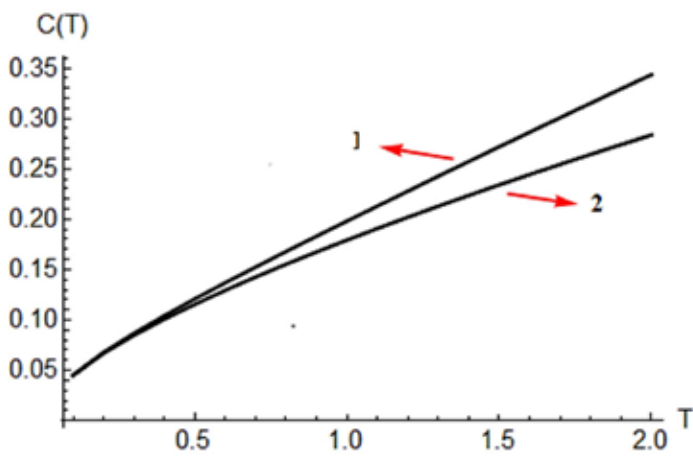


Рис. 1. Залежності ціни опціонів від терміну до виконання опціону (T): крива 1 – модель Гестона-KIP, крива 2 – класична модель Гестона

Джерело: сформовано авторами

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. S. L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*. 1993. Vol. 6, No. 2, P. 327–343.
2. R. Schöbel, J. Zhu. Stochastic volatility with an Ornstein–Uhlenbeck process: An extension. *European Finance Review*. 1999. Vol. 3 (1), P. 23–46.
3. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*. 1973. Vol. 81, No. 3, P. 637–654.
4. Hull J., White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*. 1987. Vol. 42, No. 2, P. 281–300.
5. Long Teng, Matthias Ehrhardt, Michael Günther. On the Heston model with stochastic correlation. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2016. Vol. 19, No. 6, P. 1–25.
6. Rebonato R. Volatility and Correlation. The Perfect Hedger and the Fox. John Wiley & Sons, 2nd Edition, 2004. 864 p.
7. Stein E. M., Stein J. C. Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach. *Review of Financial Studies*. 1991. Vol. 4, No. 4, P. 727–752.
8. Grzelak L. A., Oosterlee C.W., Van Weeren S. The affine Heston model with correlated Gaussian interest rates for pricing hybrid derivatives. *Quantitative Finance*. 2011. Vol. 11, P. 1647–1663.
9. Grzelak L. A., Oosterlee C. W., Van Weeren S. Extension of stochastic volatility equity models with the Hull-White interest rate process. *Quantitative Finance*. 2012. Vol. 12, P. 89–105.
10. Guo S., Grzelak L. A., Oosterlee C. W. Analysis of an affine version of the Heston-Hull-White option pricing partial differential equation. *Applied Numerical Mathematics*. 2013. Vol. 72, P.143–159.
11. Van Haastrecht A., Lord R., Pelsser A., Schrager D. Pricing long-dated insurance contracts with stochastic interest rates and stochastic volatility. *Insurance: Mathematics and Economics*. 2009. Vol. 45(3), P. 436–448.
12. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*. 1985. Vol. 53, No. 2, P. 363–384.
13. Hull J., White A. Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies*. 1990. Vol. 3, No. 4, P. 573–592.
14. Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*. 1977. Vol. 5 (2), P. 177–188.
15. Sippel J., Ohkoshi S. All power to PRDC notes. *Risk Magazine*. 2002. Vol. 15(11), P. 1–3.
16. Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates. *Journal of Finance*. 1981. Vol. 36 (4), P. 769–799.
17. Grzelak L. A., Oosterlee C. W. On the Heston model with stochastic interest rates. *SIAM Journal on Financial Mathematics*. 2011. Vol. 2 (1), P. 255–286.
18. Ahlip R., Rutkowski M. Pricing of foreign exchange options under the Heston stochastic volatility model and CIR interest rates. *Quantitative Finance*. 2013. Vol. 13 (6), P. 955–966.
19. Grzelak L. A., Oosterlee C. W. An equity-interest rate hybrid model with stochastic volatility and the interest rate smile. *The Journal of Computational Finance*. 2012. Vol. 15, No. 4, P. 12–32.
20. Grzelak L. A., C. W. Oosterlee. On cross-currency models with stochastic volatility and correlated interest rates. *Applied Mathematical Finance*. 2012. Vol. 19 (1), P. 1–35.
21. A. van Haastrecht, A. Pelsser. Generic pricing of FX, inflation and stock options under stochastic interest rates and stochastic volatility. *Quantitative Finance*. 2011. Vol. 11(5), P. 665–691.
22. S. Fallah, A. Najafi, F. Mehrdoust. A fractional version of the Cox-Ingersoll-Ross interest rate model and pricing double barrier option with Hurst index. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 2018. Vol. 48(9), P. 1–16.
23. M. Abudy, Y. Izhakian. Pricing stock options with stochastic interest rate. *International Journal of Portfolio Analysis and Management*. 2013. Vol. 1(3), P. 250–277.
24. K. Rindell. Pricing of index options when interest rates are stochastic: An empirical test. *Journal of Banking and Finance*. 1995. Vol. 19 (5), P. 785–802.
25. J. C. Hull, A. D. White. Using Hull-White interest rate trees. *Journal of Derivatives*. 1996. Vol. 3 (3), P. 26–36.
26. Yanishevskiy V. S. Path Integral Solutions for Extended Heston Models. *Mathematical Modeling and Computing*. 2025. Vol. 12, No. 4, P. 1341–1356.
27. Xin-Jiang He, Song-Ping Zhu. A closed-form pricing formula for European options under the Heston model with stochastic interest rate. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2018. Vol. 335, P. 323–333.
28. Янішевський В.С. Ціна опціону в розширеній моделі Гестона. *Економіка та суспільство*. 2025. No 79.

29. URL: <https://economyandsociety.in.ua/index.php/journal/article/view/6796>_DOI: <https://doi.org/10.3278/2/2524-0072/2025-79-139>

REFERENCES:

1. S. L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*. 1993. Vol. 6, No. 2, P. 327–343.
2. R. Schöbel, J. Zhu. Stochastic volatility with an Ornstein–Uhlenbeck process: An extension. *European Finance Review*. 1999. Vol. 3 (1), P. 23–46.
3. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*. 1973. Vol. 81, No. 3, P. 637–654.
4. Hull J., White A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*. 1987. Vol. 42, No. 2, P. 281–300.
5. Long Teng, Matthias Ehrhardt, Michael Günther. On the Heston model with stochastic correlation. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2016. Vol. 19, No. 6, P. 1–25.
6. Rebonato R. Volatility and Correlation. The Perfect Hedger and the Fox. John Wiley & Sons, 2nd Edition, 2004. 864 p.
7. Stein E. M., Stein J. C. Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach. *Review of Financial Studies*. 1991. Vol. 4, No. 4, P. 727–752.
8. Grzelak L. A., Oosterlee C.W., Van Weeren S. The affine Heston model with correlated Gaussian interest rates for pricing hybrid derivatives. *Quantitative Finance*. 2011. Vol. 11, P. 1647–1663.
9. Grzelak L. A., Oosterlee C. W., Van Weeren S. Extension of stochastic volatility equity models with the Hull-White interest rate process. *Quantitative Finance*. 2012. Vol. 12, P. 89–105.
10. Guo S., Grzelak L. A., Oosterlee C. W. Analysis of an affine version of the Heston-Hull-White option pricing partial differential equation. *Applied Numerical Mathematics*. 2013. Vol. 72, P.143–159.
11. Van Haastrecht A., Lord R., Pelsner A., Schrager D. Pricing long-dated insurance contracts with stochastic interest rates and stochastic volatility. *Insurance: Mathematics and Economics*. 2009. Vol. 45 (3), P. 436–448.
12. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*. 1985. Vol. 53, No. 2, P. 363–384.
13. Hull J., White A. Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies*. 1990. Vol. 3, No. 4, P. 573–592.
14. Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*. 1977. Vol. 5(2), P. 177–188.
15. Sippel J., Ohkoshi S. All power to PRDC notes. *Risk Magazine*. 2002. Vol. 15 (11), P. 1–3.
16. Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. A re-examination of traditional hypotheses about the term structure of interest rates. *Journal of Finance*. 1981. Vol. 36 (4), P. 769–799.
17. Grzelak L. A., Oosterlee C. W. On the Heston model with stochastic interest rates. *SIAM Journal on Financial Mathematics*. 2011. Vol. 2 (1), P. 255–286.
18. Ahlip R., Rutkowski M. Pricing of foreign exchange options under the Heston stochastic volatility model and CIR interest rates. *Quantitative Finance*. 2013. Vol. 13(6), P. 955–966.
19. Grzelak L. A., Oosterlee C. W. An equity-interest rate hybrid model with stochastic volatility and the interest rate smile. *The Journal of Computational Finance*. 2012. Vol. 15, No. 4, P. 12–32.
20. Grzelak L. A., C. W. Oosterlee. On cross-currency models with stochastic volatility and correlated interest rates. *Applied Mathematical Finance*. 2012. Vol. 19 (1), P. 1–35.
21. A. van Haastrecht, A. Pelsner. Generic pricing of FX, inflation and stock options under stochastic interest rates and stochastic volatility. *Quantitative Finance*. 2011. Vol. 11(5), P. 665–691.
22. S. Fallah, A. Najafi, F. Mehrdoust. A fractional version of the Cox-Ingersoll-Ross interest rate model and pricing double barrier option with Hurst index. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 2018. Vol. 48 (9), P. 1–16.
23. M. Abudy, Y. Izhakian. Pricing stock options with stochastic interest rate. *International Journal of Portfolio Analysis and Management*. 2013. Vol. 1 (3), P. 250–277.
24. K. Rindell. Pricing of index options when interest rates are stochastic: An empirical test. *Journal of Banking and Finance*. 1995. Vol. 19 (5), P. 785–802.
25. J. C. Hull, A. D. White. Using Hull-White interest rate trees. *Journal of Derivatives*. 1996. Vol. 3 (3), P. 26–36.
26. Yanishevskyi V. S. Path Integral Solutions for Extended Heston Models. *Mathematical Modeling and Computing*. 2025. Vol. 12, No. 4, P. 1341–1356.

27. Xin-Jiang He, Song-Ping Zhu. A closed-form pricing formula for European options under the Heston model with stochastic interest rate. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2018. Vol. 335. P. 323-333.
28. Yanishevs'kyi V.S. (2025) Tsina optionu v rozshyreniy modeli Hestona [Option price in the extended Heston model]. *Ekonomika ta suspil'stvo*, no 79.
29. URL: <https://economyandsociety.in.ua/index.php/journal/article/view/6796>, DOI: <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2025-79-139>