

DOI: <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2025-79-139>

УДК 330.43+336.764.2

ЦІНА ОПЦІОНУ В РОЗШИРЕНІЙ МОДЕЛІ ГЕСТОНА

OPTION PRICE IN THE EXTENDED HESTON MODEL

Янішевський Василь Степанович

кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри прикладної математики,
Національний університет «Львівська політехніка»
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0449-6686>

Yanishevskyi Vasyl

Lviv Polytechnic National University

Розглянуто розширення моделі Гестона, що враховує стохастичну динаміку відсоткової ставки. Відсоткова ставка моделюється стохастичним процесом Васічека. Зазначена розширена модель Гестона має точний розв'язок. Наведені аналітичні розв'язки мають місце за відсутності кореляції процесу Вінера рівняння відсоткової ставки з процесами Вінера рівнянь ціни та волатильності активу. Проаналізовано розв'язок розширеної моделі Гестона для густини умовної ймовірності ціни активу та ціни європейського опціону кол. Наведено формулу ціни опціону, що містить часо-ву структуру відсоткової ставки та усереднення за густиною умовної ймовірності моделі Гестона ефективної платіжної функції. Проведено аналітичний та чисельний аналіз впливу стохастичної динаміки відсоткової ставки на ціну європейського опціону кол порівняно з класичною моделлю Гестона.

Ключові слова: стохастичні рівняння, броунівський рух, рівняння Васічека, ціна опціону, модель Блека-Шоулза, розширена модель Гестона.

Analytical methods for studying option pricing become significantly more complicated as the dimensionality of models increases. In this work, we consider an extension of the Heston model that accounts for the stochastic dynamics of the interest rate. The interest rate is modeled as a Vasicek stochastic process. It is known that this extended Heston model admits exact solutions in the absence of correlations between the Wiener process of the interest rate and the other processes of the model. However, there are certain difficulties in practical application, since the solutions involve complex integrals that can only be evaluated numerically. Therefore, the development of analytical methods for modeling the stochastic dynamics of option pricing within the extended Heston model is important. In this study, we derive a formula for determining the option price in the extended Heston model, in which the term structure of the interest rate is explicitly incorporated, and averaging is performed with the conditional probability density of the Heston model discount factor corresponding to a constant interest rate is replaced by the term structure factor for a stochastic interest rate in the Vasicek model, and the payoff function is replaced by an effective payoff function. A qualitative analysis of the option price obtained from the above formula, compared with the standard Heston model, shows an increase in the option price. Compared to the Heston model, where the interest rate r_0 is constant, the stochastic dynamics cause its expected value to decrease. As a result, the discount factor increases, and consequently, the option price also increases. A comparative numerical analysis of option prices in the Heston model and the extended Heston model is presented. Although the problem is two-dimensional, performing the numerical computations does not present significant difficulties, since the infinite integration limits can be replaced with finite ones. The obtained structure of the option pricing formula corresponds to a decomposition of the extended Heston model into subsystems: the Heston model and the Vasicek interest rate model. The proposed analytical method can be effective for studying stochastic multifactor models in financial engineering that can be decomposed into subsystems with known solutions. The resulting formulas may be useful for analyzing stock market statistical data and calibrating models.

Keywords: stochastic equations, Brownian motion, Vasicek equation, option pricing, Black-Scholes model, extended Heston model.

Постановка проблеми. Стохастичні диференціальні рівняння (СДР), відомі також як рівняння Ланжевена [1-5], використовуються

для моделювання різноманітних фінансових процесів. Стохастичні елементи СДР зазвичай базуються на стохастичному процесі

Вінера (броунівський рух). Кожній системі СДР ставиться у відповідність рівняння Фоккера-Планка (ФП) розв'язком якого є густина умовної ймовірності змінних стохастичних рівнянь. Розв'язок рівняння ФП є досить ефективним підходом з використанням методу функціонального інтегрування [6-8]. У роботі [8] було побудовано розв'язок багатовимірної рівняння ФП з використанням вказаного методу. На його основі було знайдено розв'язок двовимірної моделі Гестона ціноутворення активів та деривативів у фінансовій інженерії [2; 9]. Зазначений розв'язок для густини умовної ймовірності моделі був знайдений також за допомогою інших методів [10; 11].

Класична модель Гестона є розширенням моделі Блека-Шоулза [2; 9] у випадку стохастичної волатильності, де її динаміка задається процесом Кокса-Інгерсолла-Росса (KIP). Однак у цій моделі відсоткова ставка є постійною, і це припущення часто не підходить для довгострокових опціонів, оскільки відсоткова ставка змінюється. Тому розглядають розширення моделі Гестона, що враховують стохастичну динаміку відсоткової ставки. Для відсоткової ставки застосовуються такі стохастичні процеси, як модель Васічека, KIP процес та інші [12-14]. Розширені моделі Гестона є складнішими для вивчення через кореляції з додатковими процесами Вінера, тому розв'язок у замкнутій формі не завжди існує. У низці робіт запропоновано деякі наближені методи розв'язування, а також використовуються числові моделювання з використанням методу Монте-Карло [12; 15; 16].

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Класична модель Гестона [9] є однією з фундаментальних моделей у фінансах і широко застосовується на фінансових ринках, таких як ринки акцій, валютні ринки. Вплив стохастичної динаміки відсоткової ставки на ціноутворення довгострокових опціонів емпірично досліджували Бакші, Цао, Чень [17]. Розширення моделі Гестона із включенням стохастичної відсоткової ставки розглядали Гжелак та Остерлі [12], Ван Хаастрехт та Пельссер [13] та інші (див. посилання в них). Модель запропонована Гжелак та Остерлі містить повну матрицю кореляцій між волатильністю Гестона та відсотковими ставками. Через те модель немає аналітичних розв'язків, тому для оцінки опціонів слід застосовувати певні схеми наближень.

Ряд інших розширень моделі Гестона розглянуто в роботах [18-20]. Зокрема Тенг та інші [18] для покращення моделі Гестона

додатково за-дають процес стохастичної кореляції. В роботі Мехрдуста та інших [19] вводяться два стохастичні процеси для волатильності ціни активу та їх вплив на ціноутворення опціонів. Фрутос та Гатон [20] запропонували розширення моделі Гестона, де додаткове стохастичне рівняння задають для дисконтного множника та виводять формулу для ціни опціону.

У підсумку зазначимо, як стверджується в [12], для точного моделювання похідних фінансових інструментів необхідно задавати ненульову кореляцію між ціною акцій та відсотковою ставкою, що приводить до суттєвого ускладнення аналізу моделей.

Постановка задачі. Аналітичні методи вивчення ціноутворення опціонів значно ускладнюються із збільшенням вимірності моделей. Зокрема, розширена модель Гестона, що враховує стохастичність відсоткової ставки, допускає точні розв'язки лише за відсутності кореляцій між вінерівським процесом відсоткової ставки та іншими процесами моделі. Існують також певні труднощі застосування розв'язків на практиці, оскільки вони містять складні інтеграли. Тому розвиток аналітичних методів у моделюванні стохастичної динаміки ціноутворення у розширених моделях Гестона є важливим.

В даній роботі побудована формула для визначення ціни опціону в розширеній моделі Гестона, у якій виділено часову структуру відсоткової ставки, а усереднення ведеться з густиною умовної ймовірності моделі Гестона. Отримана формула є більш зручною для проведення аналітичних, чисельних розрахунків та застосувань моделі до аналізу ринкових даних.

Виклад основного матеріалу дослідження. Модель Гестона задається системою стохастичних диференціальних рівнянь:

$$dS(\tau) = rS(\tau)d\tau + S(\tau)\sqrt{V(\tau)}dW_s(\tau),$$

$$dV(\tau) = \kappa(\theta - V(\tau))d\tau + \sigma\sqrt{V(\tau)}dW_v(\tau). \quad (1)$$

Стохастичні змінні $V(\tau), S(\tau)$ у рівняннях (1) задані на часовому інтервалі $\tau \in [t_0, t]$. Прирости вінерівських процесів $dW_s(\tau), dW_v(\tau)$ вважаються корельованими $dW_s(\tau)dW_v(\tau) = \rho$. Відсоткова ставка r є сталою величиною, як і інші параметри моделі κ, θ, σ .

Модель Гестона є розширенням моделі ціноутворення опціонів Блека-Шоулза у випадку стохастичної волатильності. Перше рівняння в (1) моделює динаміку ціни активу

$S(\tau)$, де волатильність містить стохастичну величину $V(\tau)$, динаміка якої задається другим рівнянням. Рівняння динаміки ціни є узагальненням геометричного броунівського руху, тоді як друге рівняння відоме як стохастичний процес KIP.

Визначимо ціну опціону $C(t)$ як дисконтоване математичне очікування платіжної функції $F_C(S) = (S - K)^+$ (індекс $(\dots)^+$ вказує на умову виконання опціону $S \geq K$, K – ціна виконання опціону (страйк ціна)) з густиною умовної ймовірності $K(S, S_0, V, V_0, t, t_0)$

$$C(t) = e^{-r(t-t_0)} \int_0^\infty \int_0^\infty K(S, S_0, V, V_0, t, t_0) F_C(S) dV dS, \quad (2)$$

де r – відсоткова ставка.

Оскільки платіжна функція $F_C(S)$ залежить лише від змінної ціни активу S визначимо ціну опціону за допомогою густини умовної ймовірності $K(S, S_0, t, t_0)$ для змінної ціни активу S , а також виконаємо заміну змінної $S = S_0 e^x$. Тоді рівняння для ціни опціону матиме вигляд

$$C(t) = e^{-r(t-t_0)} \int_{-\infty}^\infty K(x, t) F_C(S_0 e^x) dx. \quad (3)$$

Вираз для густини умовної ймовірності $K(x, t)$ в моделі Гестона знайдено в роботах [10; 11; 21] і визначається інтегралом Фур'є

$$K(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ik(x-r(t-t_0))} e^{\frac{1}{2}\alpha\gamma(t-t_0)} e^{-\frac{k(k-i)V_0}{\gamma+2\omega\coth(\omega(t-t_0))}} \times \\ \left(\cosh(\omega(t-t_0)) + \frac{\gamma \sinh(\omega(t-t_0))}{2\omega} \right)^{-\alpha} dk. \quad (4)$$

Тут позначено:

$$\gamma = \kappa + ik\rho\sigma_v, \alpha = \frac{2\theta\kappa}{\sigma_v^2}, \omega = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + k(k-i)\sigma_v^2}.$$

Таким чином у моделі Гестона точний розв'язок існує для характеристичної функції, оскільки інтеграл Фур'є у (4) точно не обчислюється.

Розширена модель Гестона враховує стохастичну динаміку відсоткової ставки, яку задаємо додатковим стохастичним рівнянням Васічека:

$$dS(\tau) = r(\tau)S(\tau)d\tau + S(\tau)\sqrt{V(\tau)}dW_s(\tau), \\ dV(\tau) = \kappa(\theta - V(\tau))d\tau + \sigma_v\sqrt{V(\tau)}dW_v(\tau), \quad (5)$$

$$dr(\tau) = \beta(\mu - r(\tau))d\tau + \sigma_r dW_r(\tau).$$

Вважаємо, що кореляція має місце між вінерівськими процесами перших двох рівнянь $dW_s(\tau)dW_v(\tau) = \rho d\tau$, а також процес

$dW_r(\tau)$ не корелює з іншими процесами Вінера $dW_i(\tau)dW_r(\tau) = 0$, $i = s, v$.

Для розширеної моделі Гестона зі стохастичною відсотковою ставкою, ціну опціону можна записати так [2]

$$C(t) = e^{-\int_{t_0}^t r(\tau)d\tau} F_C(S), \quad (6)$$

де $\langle \dots \rangle$ позначає усереднення за всіма стохастичними процесами.

Нас цікавить розрахунок цього очікування, оскільки для більшості моделей опціонів немає формул замкнутої форми. Знову перейдемо до змінної x для ціни активу та довільних значень r і V на момент реалізації опціону і запишемо для ціни опціону формулу

$$C(t) = \int_{-\infty}^\infty F(x, t) (S_0 e^x - K)^+ dx \quad (7)$$

Тут $F(x, t)$ визначено інтегралом Фур'є

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(k, t) e^{ikx} dk$$

де

$$F(k, t) = e^{-\frac{(1+ik)\int_{t_0}^t r(\tau)d\tau}{2}} e^{\frac{1}{2}\alpha\gamma(t-t_0)} e^{-\frac{k(k-i)V_0}{\gamma+2\omega\coth(\omega(t-t_0))}} \times \\ e^{\frac{1}{2}(1+ik)^2 \int_{t_0}^t B(t-\tau)^2 d\tau} \left(\cosh(\omega(t-t_0)) + \frac{\gamma \sinh(\omega(t-t_0))}{2\omega} \right)^{-\alpha}$$

Вираз для $F(x, t)$ знайдений в роботі автора [21], в якій також наведена формула ціни опціону. Вказану формулу ціни опціону запишемо дещо іншим чином. Для цього $F(k, t)$ запишемо як добуток таких множників:

$$F(k, t) = P_v(t) F_v(k, t) K(k, t), \\ P_v(t) = e^{-\int_{t_0}^t r(\tau)d\tau} e^{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t B(t-\tau)^2 d\tau}, \quad (8)$$

$$F_v(k, t) = e^{-ik \int_{t_0}^t (r(\tau) - r_0 - B(t-\tau)^2) d\tau} e^{-\frac{1}{2} k^2 \int_{t_0}^t B(t-\tau)^2 d\tau}.$$

де $K(k, t)$ – характеристична функція моделі Гестона (4) у якій відсоткова ставка рівна початковому значенню r_0 ; $P_v(t)$ – часова структура відсоткової ставки в моделі Васічека [2]; $F_v(k, t)$ – Фур'є-зображення гаусового розподілу пов'язаного з рівнянням Васічека для відсоткової ставки. Тут введені також позначення:

$$r(\tau) = \mu + (r_0 - \mu) e^{-\beta(\tau-t_0)}, \quad B(\tau) = \frac{\sigma_r}{\beta} (1 - e^{-\beta\tau}). \quad (9)$$

Функцію $F(x, t)$ запишемо застосовуючи відому властивість згортки

$$F(x, t) = P_v(t) \int_{-\infty}^\infty F_v(x - y, t) K(y, t) dy, \quad (10)$$

де $K(y, t)$ – густина умовної ймовірності моделі Гестона (4); $F_V(y, t)$ – задає нормальний розподіл

$$F_V(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathbb{E}(t)^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z - m(t))^2}{\mathbb{E}(t)^2}\right),$$

де позначено:

$$m(t) = \int_{t_0}^t (r(\tau) - r_0 - B(t - \tau)^2) d\tau,$$

$$\mathbb{E}(t) = \sqrt{\int_{t_0}^t B(t - \tau)^2 d\tau}.$$

Підставимо (10) у вираз для ціни опціону (7) і виконаємо інтегрування добутку платіжної функції і нормального розподілу, отримаємо для ціни опціону формулу

$$C(t) = P_V(t) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) (S_0 e^{x f_1(x)} - K f_2(x)) dx, \quad (11)$$

де позначено:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \exp\left(m(t) + \frac{1}{2} \Sigma(t)^2\right) \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - \ln(K/S_0) + m(t) + \mathbb{E}(t)^2}{\sqrt{2} \Sigma(t)}\right)\right),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - \ln(K/S_0) + m(t)}{\sqrt{2} \Sigma(t)}\right)\right).$$

Наведені формули містить функцію похи-

$$\text{бок } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Порівняймо структуру формули (11) з відповідною формулою для сталої відсоткової ставки (4). Дисконтному множнику для сталої відсоткової ставки (4) відповідає множник часової структури (11) для стохастичної відсоткової ставки у моделі Васічека, замість платіжної функції деяка ефективна платіжна функція. Формула (11) для ціни опціону у розширеній моделі Гестона наводиться вперше.

Проаналізуємо якісно зміну ціни опціону за формулою (11) порівняно з звичайною моделлю Гестона. Часова залежність відсоткової ставки $\bar{r}(t)$ в моделі Васічека [2] відома

$$\bar{r}(t) = -\frac{\ln(P_V(t))}{t - t_0}.$$

Звідки для $\beta(t - t_0) \gg 1$ отримаємо основний доданок асимптотики

$$\bar{r}(t) \approx r_0 - \frac{\sigma_r^2}{2\beta^2} + \dots \quad (12)$$

Як бачимо, порівняно з моделлю Гестона, де відсоткова ставка r_0 постійна, стохастична динаміка призводить до її зменшення. В результаті дисконтний множник $P_V(t)$ зростає і відповідно зростає ціна опціону. В фор-

мули (12) впливає також, що модель Васічека для опису відсоткової ставки має сенс за умови $r_0 > \frac{\sigma_r^2}{2\beta^2}$.

Щодо платіжної функції зазначимо, що вона є гладкою і інтегрування у (11) здійснюється на всій осі на відміну від (4). Проте через наявність функцій $\operatorname{erf}(x)$ платіжна функція досить швидко прямує до нуля для $x < \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$. При зростанні x функції $\operatorname{erf}(x)$ прямують до одиниці, тому наближено платіжну функцію задамо у вигляді

$$S_0 e^{x f_1(x)} - K f_2(x) \approx e^{m(t) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(t)^2} S_0 e^x - K.$$

На її основі можна зробити висновок, що ефективно змінюється початкове значення ціни активу S_0 , що веде до збільшення ціни опціону. Очевидно більш детальний аналіз залежить від співвідношення між величинами $m(t)$, $\Sigma(t)$.

Наведемо порівняльний чисельний аналіз цін опціону в моделі Гестона та розширеній моделі Гестона (формули (3) і (11) відповідно). Для цього виконаємо чисельний розрахунок густини умовної ймовірності Гестона (4) і підставимо її у формули (3) і (11). Хоч задача має двовимірний характер, проте проведення чисельних розрахунків не викликає суттєвих труднощів. Зокрема, про обчислення густини умовної ймовірності (4) переходимо до дійсних функцій під інтегралом. Крім того, через наявність у підінтегральному виразі функцій змінної k , які досить швидко спадають, нескінченну область інтегрування за k обмежимо скінченим інтервалом. Відповідно в інтегралах (3) і (11) за x також обмежимо область інтегрування скінченим інтервалом. Це зумовлено тим, що густина умовної ймовірності $K(x, t)$ має вигляд «деформованого» гаусового розподілу для широкого набору параметрів моделі [22].

Також обчислюємо аналітично інтеграли за часовою змінною для величин $m(t)$, $\Sigma(t)$:

$$m(t) = \frac{r_0 - \mu}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-t_0)}\right) + \frac{\sigma_r^2}{2\beta^3} \left(\left(1 - e^{-\beta(t-t_0)}\right) \left(3 - e^{-\beta(t-t_0)}\right) - 2\beta(t-t_0) \right),$$

$$\Sigma(t)^2 = \frac{\sigma_r^2}{2\beta^3} \left(2\beta(t-t_0) - \left(1 - e^{-\beta(t-t_0)}\right) \left(3 - e^{-\beta(t-t_0)}\right) \right).$$

Задаймо значення параметрів для чисельних розрахунків (таблиця 1). Останні три параметри (β, μ, σ_r) відносяться лише до роз-

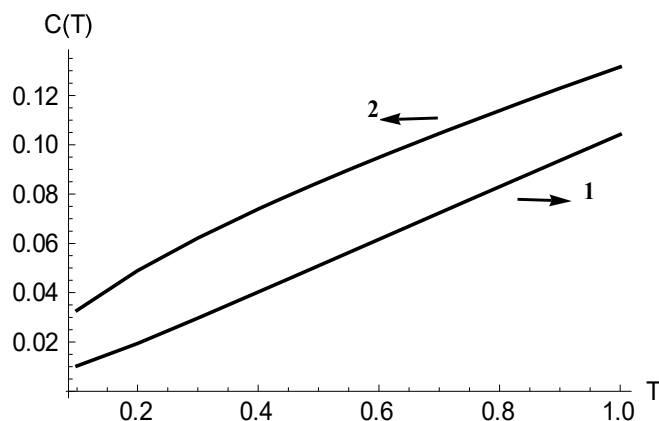


Рис. 1. Залежності ціни опціонів від терміну до виконання опціону (T): крива 1 – модель Гестона, крива 2 – розширена модель Гестона.

Джерело: сформовано автором

ширеної моделі Гестона. Крім того задамо значення $S_0 = 1, K = 1$. Зауважимо також, що параметри другого рівняння моделі Гестона задовольняють відомій умові Феллера $2\kappa\theta > \sigma_v^2$ [9], а також параметри рівняння Васічека задовольняють умову $r_0 > \frac{\sigma_r^2}{2\beta^2}$ (див. формулу 12).

Таблиця 1

Значення параметрів моделей для чисельних розрахунків

r_0	k	σ^v	V_0	θ	ρ	β	μ	σ_r
0,1	1,14	0,4	0,05	0,08	0,9	0,5	0,1	0,1

Джерело: сформовано автором

Чисельні розрахунки залежностей цін опціонів в моделі Гестона (крива 1) та розширеній моделі Гестона (крива 2) від терміну до виконання опціону (T) наведені на рис. 1.

Як видно з рисунку для розширеної моделі Гестона ціна опціону є більшою, що узгоджується з якісним аналізом наведеним вище.

Висновки. Досліджена розширена модель Гестона, де зміна відсоткової ставки задана стохастичним процесом Васічека. Точні розв'язки мають місце у випадку відсутності кореляції між процесом Вінера рівняння відсоткової ставки з іншими процесами. Для ціни опціону побудована формула, що за структурою відповідає звичній моделі Гестона. Така структура еквівалентна розбиттю розширеної моделі Гестона на підсистеми: модель Гестона для ціни активу та модель Васічека відсоткової ставки. Проведено аналітичне та чисельне дослідження ціни опціону для заданого набору параметрів моделі та наведене порівняння із звичайною моделлю Гестона.

Наведений метод аналізу може бути ефективним при дослідженні стохастичних багатфакторних моделей фінансової інженерії, які можна розбивати на підсистеми, для кожної з яких розв'язки відомі. Наведені формули можуть бути корисними при аналізі статистичних даних фондових ринків та калібруванні моделей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. C. Gardiner. Handbook of Stochastic Methods - For Physics, Chem, Nat. Sciences. Springer, 2004. 417 p.
2. Lyuu Y.-D. Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, and Algorithms. Cambridge University Press, 2004. 648 p.
3. Grigorios A. Pavliotis. Stochastic Processes and Applications. Diffusion Processes, the Fokker-Planck and Langevin Equations. Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013. 339 p.
4. Paul W., Baschnagel J. Stochastic Processes. From Physics to Finance. Springer Cham, 2013. 231 p.
5. M. Scott. Applied Stochastic Processes in science and engineering. Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013. 316 p.

6. Vadim Linetsky. The Path Integral Approach to Financial Modeling and Options Pricing. *Computational Economics*. 1998. 11, P. 129-163.
7. Marc Goovaerts, Ann De Schepper, Marc Decamps. Closed-form approximations for diffusion densities: a path integral approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2004. 164-165. P. 337-364.
8. Yanishevskiy V. Solution to the Fokker-Plank equation in the path integral method. *Mathematical Modeling and Computing*. 11(4), 1046-1057 (2024).
9. F. D. Rouah. The Heston Model and its Extensions in Matlab and C. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA. 2013. 432 p.
10. Adrian A. Druágulescu and Victor M. Yakovenko. Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility. *Quantitative finance*. 2002. Vol. 2, P. 443-453.
11. Sebastian del Bano Rollin, Albert Ferreira-Castilla, Frederic Utzet. A new look at the Heston characteristic function. Preprint, arXiv:0902.2154v1 [math.PR]. 2009. P. 30.
12. Grzelak L. A. and Oosterlee C. W. On the Heston model with stochastic interest rates. *SIAM Journal on Financial Mathematics*. 2011. 2 (1), P. 255-286.
13. Van Haastrecht A. and Pelsser A. Generic pricing of FX, inflation and stock options under stochastic interest rates and stochastic volatility. *Quantitative Finance*. 2011. 5, P. 665-691.
14. Xin-Jiang He, Song-Ping Zhu. A closed-form pricing formula for European options under the Heston model with stochastic interest rate. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2018. 2, P. 323-333.
15. Chao Zheng, Jiangtao Pan. Unbiased estimators for the Heston model with stochastic interest rates. Preprint, arXiv:2301.12072v2 [q-fin.CP]. 2023. P. 22.
16. Giacomo Ascione, Farshid Mehrdoust, Giuseppe Orlando, Oldouz Samimi. Foreign Exchange Options on Heston-CIR Model Under Levy Process Framework. *Applied Mathematics and Computation*. 2022. Vol. 446. P. 31.
17. Bakshi, S., Cao, C., Chen, Z. Pricing and hedging long-term options. *Journal of Econometrics*. 2000. 94, P. 2003-2049.
18. Long Teng, Matthias Ehrhardt and Michael ünther. On the Heston model with stochastic correlation. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2016. Vol. 9. No 6. P. 1650-1680.
19. Farshid Mehrdoust, Idin Noorani, Abdelouahed Hamdi. Two-factor Heston model equipped with regime-switching: American option pricing and model calibration by Levenberg-Marquardt optimization algorithm. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2023. Vol. 204, P. 660-678.
20. Javier de Frutos, Victor Gatón. An extension of Heston's SV model to stochastic interest rates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2019. 2, P. 174-182.
21. Yanishevskiy V. Solution to extended Heston models in the path integral method. *Mathematical Modeling and Computing*. (2025) (in print).
22. Янішевський В. С., Пелех О. В. Чисельне моделювання цінової динаміки в розширеній моделі Гестона. *Економіка та суспільство*. 2024. № 69. URL: <https://economyandsociety.in.ua/index.php/journal/article/view/5090> DOI: 10.32782/2524-0072/2024-69-10

REFERENCES:

1. C. Gardiner. Handbook of Stochastic Methods - For Physics, Chem, Nat. Sciences. Springer, 2004. 417 p.
2. Lyuu Y.-D. Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, and Algorithms. Cambridge University Press, 2004. 648 p.
3. Grigorios A. Pavliotis. Stochastic Processes and Applications. Diffusion Processes, the Fokker-Planck and Langevin Equations. Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013. 339 p.
4. Paul W., Baschnagel J. Stochastic Processes. From Physics to Finance. Springer Cham, 2013. 231 p.
5. M. Scott. Applied Stochastic Processes in science and engineering. Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013. 316 p.
6. Vadim Linetsky. The Path Integral Approach to Financial Modeling and Options Pricing. *Computational Economics*. 1998. 11, P. 129-163.
7. Marc Goovaerts, Ann De Schepper, Marc Decamps. Closed-form approximations for diffusion densities: a path integral approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2004. 164-165, P. 337-364.
8. Yanishevskiy V. Solution to the Fokker-Plank equation in the path integral method. *Mathematical Modeling and Computing*. 11(4), 1046-1057 (2024).
9. F. D. Rouah. The Heston Model and its Extensions in Matlab and C. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA. 2013. 432 p.
10. Adrian A. Druágulescu and Victor M. Yakovenko. Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility. *Quantitative finance*. 2002. Vol. 2, P. 443-453.

11. Sebastian del Bano Rollin, Albert Ferreiro-Castilla, Frederic Utzet. A new look at the Heston characteristic function. Preprint, arXiv:0902.2154v1 [math.PR]. 2009. P. 30.
12. Grzelak L. A. and Oosterlee C. W. On the Heston model with stochastic interest rates. *SIAM Journal on Financial Mathematics*. 2011. 2 (1), P. 255-286.
13. Van Haastrecht A. and Pelsser A. Generic pricing of FX, inflation and stock options under stochastic interest rates and stochastic volatility. *Quantitative Finance*. 2011. 5, P. 665-691.
14. Xin-Jiang He, Song-Ping Zhu. A closed-form pricing formula for European options under the Heston model with stochastic interest rate. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2018. 2, P. 323-333.
15. Chao Zheng, Jiangtao Pan. Unbiased estimators for the Heston model with stochastic interest rates. Preprint, arXiv:2301.12072v2 [q-fin.CP]. 2023. P. 22.
16. Giacomo Ascione, Farshid Mehrdoust, Giuseppe Orlando, Oldouz Samimi. Foreign Exchange Options on Heston-CIR Model Under Levy Process Framework. *Applied Mathematics and Computation*. 2022. Vol 446, P. 31.
17. Bakshi, S., Cao, C., Chen, Z. Pricing and hedging long-term options. *Journal of Econometrics*. 2000. 94, P. 2003-2049.
18. Long Teng, Matthias Ehrhardt and Michael ünther. On the Heston model with stochastic correlation. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2016. Vol. 9, No 6, P. 1650-1680.
19. Farshid Mehrdoust, Idin Noorani, Abdelouahed Hamdi. Two-factor Heston model equipped with regime-switching: American option pricing and model calibration by Levenberg-Marquardt optimization algorithm. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2023. Vol. 204, P. 660-678.
20. Javier de Frutos, Victor Gatón. An extension of Heston's SV model to stochastic interest rates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2019. 2, P. 174-182.
21. Yanishevskyi V. Solution to extended Heston models in the path integral method. *Mathematical Modeling and Computing*. (2025) (in print).
22. Yanishevs'kyi V. S., Pelek O. V. (2024) Chysel'ne modelyuvannya tsinovoyi dynamiky v rozshyreniy modeli Hestona [Numerical modeling of price dynamics in the extended Heston model]. *Ekonomika ta suspil'stvo*, no 69. URL: <https://economyandsociety.in.ua/index.php/journal/article/view/5090> DOI: 10.32782/2524-0072/2024-69-10