

УДК 330.43+336.764.2

DOI: <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2024-69-10>

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЦІНОВОЇ ДИНАМІКИ В РОЗШИРЕНІЙ МОДЕЛІ ГЕСТОНА

NUMERICAL MODELING OF PRICE DYNAMICS IN THE EXTENDED HESTON MODEL

Янішевський Василь Степанович

кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри прикладної математики,
Національний університет «Львівська політехніка»
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0449-6686>

Пелех Ольга Василівна

магістр,
Національний університет «Львівська політехніка»
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-5827-6829>

Yanishevskiy Vasyl, Pelekh Olha
Lviv Polytechnic National University

В роботі проведено чисельне дослідження розширеної моделі Гестона ціноутворення активів та деривативів у фінансовій інженерії. Додатково до класичної моделі Гестона додано стохастичний процес Кокса-Інгерсолла-Росса (CIR) відсоткової ставки. Для такої моделі у випадку відсутності кореляції вінерівського процесу ймовірності змінної ціни активу використовується як тестовий при чисельному аналізі моделі. Для чисельного аналізу розширеної моделі Гестона застосовані схеми Ейлера та Мільштейна розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь. Знайдені чисельні масиви значень для густин умовних ймовірностей ціни активу і волатильності. Використані методи інтерполяції, які на основі даних гістограм дають змогу отримати значення густин умовних ймовірностей для широкого проміжку змін ціни активу.

Ключові слова: стохастичні рівняння, броунівський рух, ціна опціону, модель Блека-Шоулза, розширена модель Гестона, стохастичний процес Кокса-Інгерсолла-Росса, схеми Ейлера, Мільштейна.

The paper presents a numerical study of the extended Heston model for asset and derivative pricing in financial engineering. Building on the foundational one-dimensional Black-Scholes model, the classical Heston model introduces stochastic volatility through two stochastic differential equations: one describing the dynamics of asset prices and the other governing volatility. The extended Heston model further incorporates the CIR stochastic process to represent the dynamics of the interest rate. The development of multi-dimensional models, such as the extended Heston model, has necessitated the broader application of numerical methods for analyzing stochastic pricing models. Analytical solutions for models involving multiple stochastic equations are often difficult to obtain or may not exist. In the extended Heston model, analytical solutions are known only in the absence of correlation in the Wiener

process for the interest rate. These solutions for the conditional probability density of the variable $x(t) = \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)$

are used to validate numerical solutions of the model's stochastic equations. The paper employs the Euler and Milstein schemes to numerically analyze the extended Heston model, generating arrays of values for asset prices, volatility, and interest rates. Interpolation methods, based on histogram data, are used to estimate the conditional probability densities of the asset price $x(t)$ under different parameter configurations. Due to the high dimensionality and numerous parameters of the extended Heston model, exploring the full parameter space to study asset price dynamics is a complex task. This study focuses on the influence of the correlation coefficient (ρ_r) of the Wiener process in the interest rate equation on the conditional probability density of asset prices. The findings reveal that, for both positive and negative values of ρ_r , the effect is negligible, resulting in minimal changes to the conditional probability density curve. Consequently, the impact of the stochastic dynamics of interest rates on option pricing is primarily determined by the discount factor, which defines the temporal structure of interest rates within the model.

Keywords: stochastic equations, Brownian motion, option pricing, Black-Scholes model, extended Heston model, Cox-Ingersoll-Ross stochastic process, Euler and Milstein schemes.

Постановка проблеми. Модель Блека-Шоулза [1] оцінки опціонів задає постійну волатильність ціни, що не повністю відображає цінову динаміку активів на фінансових ринках. Моделі в яких волатильність визначається певним стохастичним процесом отримали назву стохастичних моделей волатильності.

Класична модель Гестона [2] є розширенням моделі Блека-Шоулза на випадок стохастичної волатильності, де її динаміка задається процесом Кокса-Інгерсолла-Росса. Модель Гестона належить до афінних дифузійних процесів [2] для яких відома структура характеристичної функції. Для моделі Гестона відомі точні розв'язки для ціноутворення опціонів кол та пут.

Розглядаються також розширення моделі Гестона, які враховують стохастичну динаміку відсоткової ставки. При цьому для відсоткових ставок застосовують такі стохастичні процеси [3; 4] як модель Васічека, процес КІР та інші. Деякі з розширень моделі Гестона належать до афінних моделей, де розв'язки знаходять у замкнутій формі заданням вигляду характеристичної функції і підстановкою у рівняння опціону [4–7]. Відомо також, що для розширених моделей Гестона за рахунок кореляцій з додатковими вінерівськими процесами розв'язок у замкнутій формі не завжди існує. В ряді робіт пропонуються певні наближені методи пошуку розв'язків, а також використовуються чисельні моделювання за методом Монте-Карло [5; 7; 8]. Ряд інших розширень моделі Гестона розглядаються в роботах [9; 10].

Через те поряд з аналітичним дослідженням моделей ціноутворення застосовуються чисельні методи. Це, зокрема, чисельний спосіб розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь, які входять в моделі ціноутворення. Застосовуються чисельні схеми Ейлера і Мільштейна, різні способи усунення від'ємних значень волатильності, що притаманні моделі Гестона [11; 12].

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

В класичній моделі Гестона безризикова відсоткова ставка $r = \text{const}$ вважається сталою величиною [2]. Розширена модель Гестона розглядалась [3–6] і враховує стохастичну динаміку відсоткової ставки, яку задають стохастичним процесом КІР:

$$dS(\tau) = r(\tau)S(\tau)d\tau + S(\tau)\sqrt{V(\tau)}dW_s(\tau),$$

$$dV(\tau) = \kappa(\theta - V(\tau))d\tau + \sigma_v\sqrt{V(\tau)}dW_v(\tau), \quad (1)$$

$$dr(\tau) = \beta(\mu - r(\tau))d\tau + \sigma_r\sqrt{r(\tau)}dW_r(\tau).$$

за початкових умов:

$$S(0) = S_0 \geq 0, V(0) = V_0 \geq 0, r(0) = r_0 \geq 0.$$

Тут $S(t)$ задає ціну активу в момент часу t , $V(t)$ – миттєва дисперсія в момент часу t , $r(t)$ – безризикова відсоткова ставка в момент часу t , θ – довгострокова середня дисперсія (для великих значень t очікуване значення $V(t)$ прямує до θ), κ – швидкість з якою $V(t)$ прямує до θ , σ_v – параметр волатильності. Такий же зміст мають відповідні параметри β, μ, σ_r у рівнянні для відсоткової ставки. Величини $dW_s(t)$, $dW_v(t)$, $dW_r(t)$ задають прирости вінерівських процесів.

Випадкові процеси для приростів $\{dV(t), dr(t)\}$ задаються процесами КІР [13; 14]. За умови Феллера $2\kappa\theta > \sigma_v^2$ для параметрів у другому рівнянні (1) величина волатильності обмежена лише додатними значеннями. Відповідно для рівняння відсоткової ставки умова Феллера має вигляд $2\beta\mu > \sigma_r^2$.

Між приростами вінерівських процесів $dW_s(t), dW_v(t)$ має місце кореляція, як у моделі Гестона ($dW_s(t) \cdot dW_v(t) = \rho dt$), а процес $dW_r(\tau)$ не корелює з іншими вінерівськими процесами. У цьому випадку розширена модель Гестона має точний розв'язок. Зокрема, у роботі [16] знайдено розв'язок для густини умовної ймовірності для змінної ціни

$$\text{активу } x = \ln\left(\frac{S}{S_0}\right).$$

$$F(x, t) = e^{\frac{1}{2}\alpha_r\beta(t-t_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x - \frac{2r_0}{\beta + 2\omega_r \coth(\omega_r(t-t_0))})} e^{\frac{1}{2}\alpha\gamma(t-t_0)} e^{-\frac{k(k-i)V_0}{\gamma + 2\omega \coth(\omega(t-t_0))}} \times$$

$$\left(\cosh(\omega_r(t-t_0)) + \frac{\beta \sinh(\omega_r(t-t_0))}{2\omega_r} \right)^{-\alpha_r} \left(\cosh(\omega(t-t_0)) + \frac{\gamma \sinh(\omega(t-t_0))}{2\omega} \right)^{-\alpha} dk. \quad (2)$$

Тут позначено:

$$\gamma = \kappa + ik\rho\sigma_v, \lambda = \alpha - 1, \alpha = \frac{2\theta\kappa}{\sigma_v^2}, \omega = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 + k(k-i)\sigma_v^2},$$

$$\alpha_r = \frac{2\beta\mu}{\sigma_r^2}, \omega_r = \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 2ik\sigma_r^2}.$$

Вартість опціону $C(t)$ можна розрахувати як теперішню вартість їх очікуваної виплати

$$C(t) = E \left[e^{-\int_t^T r(\tau) d\tau} (S_T - K)^+ \right]. \quad (3)$$

Тут $E(\dots)$ позначає усереднення за умовною густиною ймовірності стохастичного процесу в момент часу $t < T$ (тут використано заміна позначень $t \rightarrow T, t_0 \rightarrow t$). Платіжна функція $(S_T - K)^+$ задана наступним чином

$$(S_T - K)^+ = \begin{cases} S_T - K, & \text{для } S_T > K; \\ 0, & \text{для } S_T < K. \end{cases}$$

Формулу для ціни опціону в розширеній моделі Гестона також можна записати у вигляді [3]

$$C(t) = S_t P_1 - e^{-r\tau} P_2.$$

Тут S_t ціна активу (для прикладу акції) в момент часу t , в який ведеться розгляд. Множники P_1 і P_2 задаються певними інтегралами оберненого Фур'є перетворення, що містять характеристичну функцію розширеної моделі Гестона для стохастичної змінної $x(t)$. Форми запису P_1 і P_2 наведені в [16], які ми не наводимо через їхню громіздкість. Зазначимо, що визначення P_1 і P_2 вимагає непротих чисельних розрахунків високої точності.

Постановка завдання. Очевидна перевага аналітичних виразів у моделюванні стохастичної динаміки ціноутворення у розширеній моделі Гестона в тому, що вони виражають величини у замкнутій формі. Проте також існують труднощі їх застосування, оскільки вони містять складні інтеграли від комплексних величин і можуть бути визначені лише чисельно з використанням арифметики високої точності. Загалом ефективність аналітичних методів ціноутворення опціонів знижується із збільшенням вимірності моделей. Зокрема, у розширеній моделі Гестона, точні розв'язки існують лише за відсутності кореляцій між вінерівським процесом відсоткової ставки з іншими процесами моделі. Тому вага чисельних методів розв'язання, побудова часових рядів цін активів, дисперсії цін та відсоткових ставок, з яких можна отримати як розподіли густин умовних ймовірностей цін активів так і ціни опціонів зростає. Доволі ефективними є стандартні чисельні

методи такі, як схема Ейлера чи Мільштейна [14, 15]. Їх перевагою є те, що вони прості для розуміння та їхні властивості збіжності добре вивчені.

Виклад основного матеріалу дослідження. Формула для густини умовної ймовірності (2) задана Фур'є – інтегралом і характерні особливості залежності можна виявити чисельним аналізом. Зокрема в залежності від параметра кореляції ρ можна спостерігати асиметрії кривої розподілу, що має місце також в моделі Гестона. Зокрема на рис. 1 показано випадки для додатних і від'ємних значень коефіцієнта кореляції $\rho = 0.9, \rho = -0.9$ та наступних значеннях параметрів моделі обраних для чисельного аналізу.

Таблиця 1

Значення параметрів моделі для чисельних розрахунків

| r_0 | κ | \tilde{A}_v | V_0 | θ | β | μ | σ_r | T |
|-------|----------|---------------|-------|----------|---------|-------|------------|------|
| 0.1 | 0.8 | 0.4 | 0.11 | 0.12 | 0.26 | 0.36 | 0.4 | 0.25 |

Джерело: створено авторами

На рис. 1 спостерігаємо асиметрію розподілу ціни активу, яка проявляється по різному в залежності від коефіцієнта кореляції.

Вказану характерну поведінку густини умовної ймовірності спостерігаємо також і при чисельному розв'язку моделі. Зокрема для розширеної моделі Гестона (1) запишемо явну схему Ейлера:

$$S_{n+1} = S_n + r_n S_n \Delta t + S_n \sqrt{V_n} Z_S \sqrt{\Delta t},$$

$$V_{n+1} = V_n + \kappa(\theta - V_n) \Delta t + \sigma_v \sqrt{V_n} Z_V \sqrt{\Delta t}, \quad (4)$$

$$r_{n+1} = r_n + \beta(\mu - r_n) \Delta t + \sigma_r \sqrt{r_n} Z_r \sqrt{\Delta t},$$

Тут часовий проміжок $T = (t - t_0)$ розбиваємо на $n = \frac{T}{\Delta t}$ частин, Z_S, Z_V задають корельовані нормально розподілені $N(0,1)$ випадкові величини з коефіцієнтом кореляції ρ , Z_r нормально розподілена величина $N(0,1)$ незалежна від попередніх.

Система рівнянь (4) розглядається одночасно для заданих початкових значень $\{S_0, V_0, r_0\}$. При реалізації схеми Ейлера часто виникають від'ємні значення величин $\{V_n < 0, r_n < 0\}$ на певних ітераціях, що є недопустимими за змістом. Для усунення цієї ситуації будемо у наведених формулах застосовувати заміну $\{V_n \rightarrow |V_n|, r_n \rightarrow |r_n|\}$.

Проблема від'ємних дисперсії і відсоткової ставки в меншій мірі проявляється у схемі дискретизації Мільштейна, яка задається рівняннями:

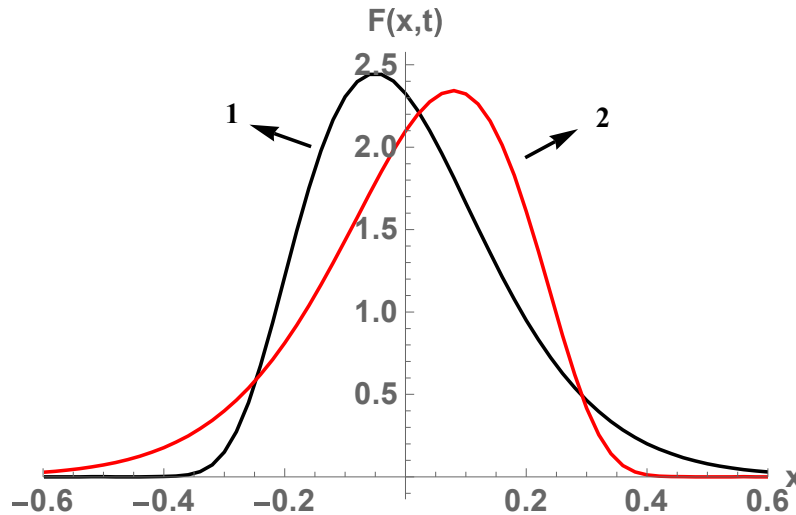


Рис. 1. Залежності густини умовної ймовірності $F(x, t)$ (формула 2): крива 1 – $\rho = 0.9$, крива 2 – $\rho = -0.9$.

Джерело: створено авторами

$$\begin{aligned}
 S_{n+1} &= S_n + r_n S_n \Delta t + S_n \sqrt{V_n} Z_S \sqrt{\Delta t} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} S_n V_n (Z_S^2 - 1) \Delta t, \\
 V_{n+1} &= V_n + \kappa(\theta - V_n) \Delta t + \sigma_V \sqrt{V_n} Z_V \sqrt{\Delta t} + \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sigma_V V_n (Z_V^2 - 1) \Delta t, \\
 r_{n+1} &= r_n + \beta(\mu - r_n) \Delta t + \sigma_r \sqrt{r_n} Z_r \sqrt{\Delta t} + \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sigma_r r_n (Z_r^2 - 1) \Delta t.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Останні доданки у рівняннях (5) сприяють тому, що випадки з від’ємними значеннями $\{V_n, r_n\}$ зустрічаються не так часто порівняно зі схемою Ейлера. Реалізація чисельного алгоритму за схемою Мільштейна відбувається так само як і за схемою Ейлера, ми будемо використовувати обидві схеми.

Як ми вже зазначали, при застосуванні чисельної схеми необхідно розігрувати дві корельовані нормально розподілені величини $\{Z_S, Z_V\}$ і незалежну від них Z_r . Для цього задаймо їх наступним чином:

$$Z_S = W_s, \quad Z_V = \rho W_s + \sqrt{1 - \rho^2} W_v, \quad Z_r = W_r, \tag{6}$$

де W_s, W_v, W_r є незалежними нормально розподіленими величинами $N(0, 1)$ [14; 17].

Чисельні розв’язки стохастичних рівнянь (4) чи (8) отримаємо для набору параметрів заданих в таблиці 1. Дискретизацію часового проміжку здійснюємо кроком $\Delta t = \frac{T}{2000}$. Статистичні дані для розширеної моделі

Гестона отримуємо на основі значної кількості (50000) стохастичних траєкторій процесів. Це дозволяє вивчати характеристики цінової динаміки, волатильності та відсоткової ставки. На їх основі визначаємо наближені значення густин умовних ймовірностей стохастичних змінних $\{S(t), V(t), r(t)\}, t \in (0, T)$. Їх знайдемо на основі побудованих гістограм, що задають оцінки ймовірностей в середніх точках інтервалів групування. Використовуючи інтерполяцію за заданими точками, отримуємо значення густин умовних ймовірностей для широкого проміжку зміни $\{S(t), V(t), r(t)\}$.

На рис. 2 показані залежності $F_n(x, t)$ отримані зазначеним чином на основі чисельного розв’язку. Як бачимо, криві отримані на основі згладжених гістограм достатньо добре відтворюють хід теоретичних кривих для густини умовної ймовірності $F(x, t)$ (рис. 1).

Розглянемо кореляцію між вінерівськими процесами у рівняннях для $S(t)$ і $r(t)$. У цьому випадку замість (6) слід використати такий розіграш випадкових величин:

$$\begin{aligned}
 Z_S &= W_s, \quad Z_V = \rho W_s + \sqrt{1 - \rho^2} W_v, \\
 Z_r &= \rho_r W_s - \frac{\rho \rho_r}{\sqrt{1 - \rho^2}} W_v + \frac{\sqrt{1 - \rho_r^2 - \rho^2}}{\sqrt{1 - \rho^2}} W_r.
 \end{aligned}$$

Безпосередньо можна переконатись, що $Z_S Z_V = \rho$, $Z_S Z_r = \rho_r$, $Z_V Z_r = 0$, в той же час W_s, W_v, W_r є незалежними, як і в попередньому випадку. В іншому чисельний аналіз повторяє попередній, лише слід задавати значення коефіцієнта кореляції ρ_r . Ми про-

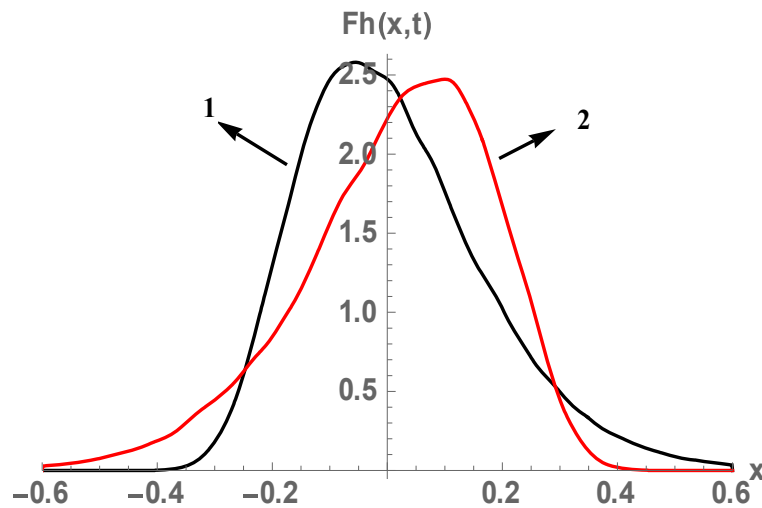


Рис. 2. Криві статистичних розподілів отримані на основі згладжених гістограм:
1 – $\rho = 0,9$, 2 – $\rho = -0,9$

Джерело: створено авторами

аналізували випадки для набору коефіцієнтів кореляції $\{\rho = \pm 0.9, \rho_r = \pm 0.8\}$ та для параметрів моделі наведених в таблиці 1. В результаті виявилось, що криві для густин умовних ймовірностей $F(x, t)$ мало відрізняються від таких наведених на рис. 2. Таким чином кореляція ρ_r несуттєво впливає на розподіл ймовірностей для змінної x . На основі цього для ціни опціону (3) можна скористатись наближенням

$$C(t) \approx e^{-\int_t^T (r(\tau) - r_0) d\tau} e^{-(T-t)r_0} (S_T - K)_{S,V}^+ \quad (7)$$

Перший множник у формулі визначає часову структуру відсоткової ставки, яка для моделі КІР є відомою [14], другий множник зводиться до ціни опціону у класичній моделі Гестона. Більш детальний чисельний аналіз ціни опціону і перевірка наведеного наближення буде виконано в окремій роботі.

Висновки. Як відомо стохастичні моделі широко застосовуються в задачах фінансової інженерії для дослідження цінової динаміки активів та деривативів на їх основі. Доволі повно аналітично досліджені одновимірні моделі, зокрема модель Блека-Шоулза та інші. Для моделей більшої вимірності, зокрема двовимірних, тривимірних моделей, аналітичні результати відомі для обмеженого кола моделей або певних значень параме-

трів моделей. Зокрема, у відомій моделі Гестона кінцеві формули для густин умовної ймовірності цінового активу та ціни опціону європейського типу містять складні інтеграли типу оберненого перетворення Фур'є. Тому актуальною стає задача чисельного аналізу моделей ціноутворення двох і більше вимірів.

В даній роботі наведені чисельні розв'язки розширеної моделі Гестона з використанням схем Ейлера і Мільштейна для стохастичних диференціальних рівнянь. Отримано чисельні розв'язки для випадкових величин розширеної моделі Гестона $\{S(t), V(t), r(t)\}, t \in (0, T)$. Отримано чисельні розв'язки для густин умов-

них ймовірностей змінної $x(t) = \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)$ для $t \in (0, T)$. Точний розв'язок розширеної моделі Гестона (випадок $\rho_r = 0$) використаний як тестовий при чисельному аналізі. Показано, що наявність кореляції між вінерівськими процесами ціни і відсоткової ставки несуттєво змінює криву густини умовної ймовірності для цінової змінної x . На основі цього запропонована наближена формула ціни опціону в розширеній моделі Гестона, яка містить два множники – часову структуру відсоткової ставки у моделі КІР та власне ціну опціону у класичній моделі Гестона.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973. ISSN 0022-3808. DOI: 10.1086/260062.

2. F. D. Rouah. The Heston Model and its Extensions in Matlab and C. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA. (2013).
3. Grzelak L. A. and Oosterlee C. W. On the Heston model with stochastic interest rates. *SIAM Journal on Financial Mathematics*. 2 (1), 255–286 (2011).
4. Van Haastrecht A. and Pelsser A. Generic pricing of FX, inflation and stock options under stochastic interest rates and stochastic volatility. *Quantitative Finance*. 11, 5, 665–691 (2011).
5. Javier de Frutos, Victor Gatón. An extension of Heston's SV model to stochastic interest rates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 354, 174–182 (2019).
6. Rehez Ahlip and Marek Rutkowski. Pricing of foreign exchange options under the Heston stochastic volatility model and CIR interest rates. *Quantitative Finance*. Vol 13, 6, 955–966 (2013).
7. Chao Zheng, Jiangtao Pan. Unbiased estimators for the Heston model with stochastic interest rates. Preprint, arXiv:2301.12072v2 [q-fin.CP], P. 22. (2023).
8. Giacomo Ascione, Farshid Mehrdoust, Giuseppe Orlando, Oldouz Samimi. Foreign Exchange Options on Heston-CIR Model Under Levy Process Framework. *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 446. P. 31. (2022).
9. Long Teng, Matthias Ehrhardt and Michael Günther. On the Heston model with stochastic correlation. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. Vol. 9. No. 6, 1650033 (2016).
10. Farshid Mehrdoust, Idin Noorani, Abdelouahed Hamdi. Two-factor Heston model equipped with regime-switching: American option pricing and model calibration by Levenberg–Marquardt optimization algorithm. *Mathematics and Computers in Simulation*. Vol. 204, P. 660-678 (2023).
11. Higham D.J. and Mao X., Convergence of monte carlo simulations involving the mean-reverting square root process. *Journal of Computational Finance* 8(3), 2005, 35–61. ISSN 1460-1559. DOI: 10.21314/JCF.2005.136.
12. Lord R., Koekkoek R., and van Dijk D., A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models. *Quantitative Finance* 10(2), 2010, 177–194. ISSN 1469-7688. DOI: 10.1080/14697680802392496.
13. John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephen A. Ross, A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* 53(2), 1985, 385–407. ISSN 0012-9682. DOI: 10.2307/1911242.
14. Yuh-Dauh Lyuu. *Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, and Algorithms*. Cambridge University Press, 648 p. (2004). ISBN: 9780521781718.
15. Gatheral J., *The volatility surface: A practitioner's guide*. Wiley Finance. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2006. ISBN 9780470068250.
16. Yanishevskiy V. Solution to extended Heston models in the path integral method. *Mathematical Modeling and Computing*. (2024) (in print).
17. Янішевський В. С., Юц Р. Є. Особливості чисельного моделювання цінової динаміки на основі моделі Гестона. *Економіка та суспільство*. 2023. No. 56. URL: <https://economyandsociety.in.ua/index.php/journal/article/view/3038>
18. DOI: 10.32782/2524-0072/2023-56-98

REFERENCES:

1. Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973. ISSN 0022-3808. DOI: 10.1086/260062.
2. F. D. Rouah. The Heston Model and its Extensions in Matlab and C. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA. (2013).
3. Grzelak L. A. and Oosterlee C. W. On the Heston model with stochastic interest rates. *SIAM Journal on Financial Mathematics*. 2 (1), 255-286 (2011).
4. Van Haastrecht A. and Pelsser A. Generic pricing of FX, inflation and stock options under stochastic interest rates and stochastic volatility. *Quantitative Finance*. 11, 5, 665-691 (2011).
5. Javier de Frutos, Victor Gatón. An extension of Heston's SV model to stochastic interest rates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 354, 174–182 (2019).
6. Rehez Ahlip and Marek Rutkowski. Pricing of foreign exchange options under the Heston stochastic volatility model and CIR interest rates. *Quantitative Finance*. Vol. 13, 6, 955–966 (2013).
7. Chao Zheng, Jiangtao Pan. Unbiased estimators for the Heston model with stochastic interest rates. Preprint, arXiv:2301.12072v2 [q-fin.CP], P. 22. (2023).
8. Giacomo Ascione, Farshid Mehrdoust, Giuseppe Orlando, Oldouz Samimi. Foreign Exchange Options on Heston-CIR Model Under Levy Process Framework. *Applied Mathematics and Computation*. Vol 446 P. 31. (2022).
9. Long Teng, Matthias Ehrhardt and Michael Günther. On the Heston model with stochastic correlation. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. Vol. 9, No 6, 1650033 (2016).

10. Farshid Mehrdoust, Idin Noorani, Abdelouahed Hamdi. Two-factor Heston model equipped with regime-switching: American option pricing and model calibration by Levenberg–Marquardt optimization algorithm. *Mathematics and Computers in Simulation*. Vol. 204, P. 660–678 (2023).
11. Higham D.J. and Mao X., Convergence of monte carlo simulations involving the mean-reverting square root process. *Journal of Computational Finance* 8(3), 2005, 35–61. ISSN 1460-1559. DOI: 10.21314/JCF.2005.136.
12. Lord R., Koekkoek R., and van Dijk D., A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models. *Quantitative Finance* 10(2), 2010, 177–194. ISSN 1469-7688. DOI: 10.1080/14697680802392496.
13. John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephen A. Ross, A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* 53(2), 1985, 385–407. ISSN 0012-9682. DOI: 10.2307/1911242.
14. Yuh-Dauh Lyuu. *Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, and Algorithms*. Cambridge University Press, 648 p. (2004). ISBN: 9780521781718.
15. Gatheral J., *The volatility surface: A practitioner's guide*. Wiley Finance. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2006. ISBN 9780470068250.
16. Yanishevskiy V. Solution to extended Heston models in the path integral method. *Mathematical Modeling and Computing*. (2024) (in print).
17. Yanishevs'kyi V. S., Yuts R. YE. Osoblyvosti chysel'noho modelyuvannya tsinovoyi dynamiky na osnovi modeli Hestona. *Ekonomika ta suspil'stvo*. 2023. No. 56. URL: <https://economyandsociety.in.ua/index.php/journal/article/view/>
18. DOI: 10.32782/2524-0072/2023-56-98