

DOI: <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2023-56-98>

УДК 330.43+336.764.2

ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЦІНОВОЇ ДИНАМІКИ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ ГЕСТОНА

FEATURES OF NUMERICAL SIMULATION OF PRICE DYNAMICS BASED ON THE HESTON MODEL

Янішевський Василь Степановичкандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри,
Національний університет «Львівська політехніка»
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0449-6686>**Юц Роман Євгенович**магістр,
Національний університет «Львівська політехніка»
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0009-4686>**Yanishevskiy Vasyl, Yuts Roman**
Lviv Polytechnic National University

У роботі проаналізовані особливості чисельного дослідження моделі Гестона ціноутворення активів та деривативів у фінансовій інженерії. Хоча для моделі Гестона відомі аналітичні розв'язки, проте використання їх на практиці потребує точних чисельних розрахунків для інтегральних виразів. Для чисельного аналізу стохастичної моделі Гестона застосовані схеми Ейлера та Мільштейна розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь. Практична реалізація виконана у програмі *Mathematica*. Знайдені чисельні масиви значень для густин умовних ймовірностей ціни активу і волатильності, значення ціни опціонів. Використані методи інтерполяції програми *Mathematica*, які на основі даних гістограм дають змогу отримати значення густин умовних ймовірностей для широкого проміжку змін ціни активу і волатильності $\{S(t), V(t)\}$. Для розуміння цінової динаміки в моделі Гестона наведено порівняльний аналіз з моделлю Блека-Шоулза. В результаті запропоновано якісний аналіз ціноутворення опціонів в моделі Гестона на основі вивчення динаміки середнього волатильності $V(t)$.

Ключові слова: стохастичні рівняння, броунівський рух, модель геометричного броунівського руху, ціна опціону, модель Блека-Шоулза, модель Гестона, схема Ейлера, схема Мільштейна.

In the paper, we analyse the characteristics of a numerical study of assets and derivatives pricing in financial engineering. The result of the development of the onedimensional Black-Scholes model is stochastic volatility models, in particular a twodimensional Heston model. The appearance of two- and multidimensional models pushes a wider application of numerical methods in the analysis of stochastic pricing models since finding analytic solutions is considerably harder or even impossible. Although the Heston model has analytic solutions, their application requires precise numerical calculations of integral equations. For numerical analysis of the stochastic Heston model the Euler and Milstein schemes for solving stochastic differential equations are applied. Practical implementation is done using Mathematica software. Numerical arrays of values for the transitional probability density of asset price, volatility price, and option price values were found. Interpolation methods of Mathematica software were used, which are based on histogram data, giving the ability to receive values of transitional probability densities for a wider range of changes of asset price and volatility $\{S(t), V(t)\}$. However Heston model as well as other twodimensional models contains plenty of parameters. For that reason studying of properties of asset price dynamics and option price in the entire value range of parameters is quite a cumbersome problem. In the work, we propose a qualitative numerical analysis based on the Heston model. Since the Heston model is an extension of the Black-Scholes model for stochastic volatility, to understand pricing dynamics a comparative analysis with the Black-Scholes model is given. For this, in the Black-Scholes model, we set the value of constant volatility equal $\sigma = \sqrt{V_0}$, where V_0 – is the initial value of stochastic volatility in the Heston model. As a result, a qualitative analysis of option pricing in the Heston model based on studying of dynamics of average volatility $V(t)$ is proposed. If the average volatility value $\sqrt{V(t)}$ is greater than the initial value $\sqrt{V_0}$ on the entire time interval t then the option price in the Heston model is higher than the Black-Scholes model implies. In case of a decrease in average volatility value compared to the initial value, the

option price in the Heston model will be lower than the Black-Scholes model implies. Similar qualitative analysis can apply to problems of pricing in other models of greater dimensionality.

Keywords: stochastic equations, Brownian motion, model of geometric Brownian motion, option price, Black-Scholes model, Heston model, Euler scheme, Milstein scheme.

Постановка проблеми. З часу появи моделі Блека-Шоулза [1] було запропоновано ряд складніших моделей для опису цінової динаміки активів і деривативів. Відомо, що модель Блека-Шоулза оцінки опціонів задає постійну волатильність ціни, що не повністю відображає динаміку на фінансових ринках. В результаті появились моделі, які отримали назву стохастичних моделей волатильності. Перші з класу вказаних моделей були моделі: Халла і Уайта [2], Скотта [3], Штейна і Штейна [4], Гестона [5]. Двовимірна модель Гестона задає кореляцію між ціною активу і процесом волатильності і є однією з найпопулярніших моделей ціноутворення опціонів. Для моделі Гестона були отримані аналітичні розв'язки для європейських цін опціонів колл і пут.

Хоча в моделі Гестона отримано аналітичні розв'язки, використання їх на практиці вимагає доволі точних чисельних розрахунків. Тому наряду з аналітичним дослідженням моделей ціноутворення застосовуються чисельні методи. Серед них – чисельний спосіб розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь, що містять моделі ціноутворення. Зокрема, застосовувались чисельні схеми Ейлера і Мільштейна, різні способи усунення від'ємних значень дисперсії, що притаманні моделі Гестона [6; 7]. Розглядаються також чисельні схеми Мільштейна вищого порядку [8].

Отримання числових розв'язків дозволяє також здійснити калібрування моделі, тобто визначити параметри моделі, шляхом мінімізації різниці між спостережуваними ринковими цінами опціонів та цінами знайденими на основі моделі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Запропонована в оригінальній статті Гестона [5] (див. також [9]) модель ціни акцій задається наступним чином:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW_S(t), \quad (1)$$

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma_V\sqrt{V(t)}dW_V(t), \quad (2)$$

за початкових умов:

$$S(0) = S_0 \geq 0, V(0) = V_0 \geq 0,$$

де $S(t)$ задає ціну активу в момент часу t , $V(t)$ – миттєва дисперсія в момент часу t , r – безризикова відсоткова ставка, θ – довгострокова середня дисперсія (для великих

значень t очікуване значення $V(t)$ прямує до θ), κ – швидкість з якою $V(t)$ прямує до θ , σ_V – параметр волатильності. Величини $dW_S(t)$ і $dW_V(t)$ задають прирости двох корельованих вінерівських процесів ($dW_S(t) \cdot dW_V(t) = \rho$).

Випадковий процес $V(t)$ називається також процесом волатильності і він відомий як процес CIR (Кокса, Інгерсола та Росса) чи процес квадратного кореня [10; 11]. Цей процес завжди позитивний і не може бути нульовим чи від'ємним, якщо виконується умова Феллера $2\kappa\theta > \sigma_V^2$. Вказана умова обмежує величину волатильності у рівнянні (2) лише додатними значеннями.

Основними параметрами моделі Гестона є $r, \kappa, \theta, \sigma_V$ та ρ . Вищі значення κ означають більшу швидкість повернення стохастичного процесу до його довгострокового середнього θ . Очевидно, що збільшення θ збільшує ціни опціонів, оскільки за моделлю Блека-Шоулза (Б.1) зі збільшенням волатильності зростає ціна опціонів. Параметр ρ впливає на асиметрію розподілу доходів і, отже, на асиметрію в «усмішці» волатильності [5; 9].

Вартість опціону $C(t)$ можна розрахувати як теперішню вартість їх очікуваної виплати

$$C(t) = e^{-r\tau} E\left((S_T - K)^+\right). \quad (3)$$

Тут $E(\dots)$ позначає усереднення за умовною густиною стохастичного процесу в момент часу $\tau = T - t$. Платіжна функція $(S_T - K)^+$ задана наступним чином

$$(S_T - K)^+ = \begin{cases} S_T - K, & \text{для } S_T > K; \\ 0, & \text{для } S_T < K. \end{cases} \quad (4)$$

Формулу для ціни опціону в моделі Гестона записують у вигляді [9]

$$C(t) = S_t P_1 - e^{-r\tau} P_2.$$

Тут S_t ціна активу (для прикладу акції) в момент часу t , в який ведеться розгляд. Множники P_1 і P_2 задаються певними інтегралами оберненого Фур'є перетворення, що містять характеристичну функцію моделі Гестона для стохастичної змінної $S(t)$. Різні форми запису P_1 і P_2 наведені в [9], які ми не наводимо через їхню громіздкість. Зазначимо, що визначення P_1 і P_2 вимагає непростих чисельних розрахунків високої точності.

Постановка задачі. Перевага аналітичних виразів для ціноутворення опціонів в моделі Гестона в тому, що вони виражають ціну опціону в замкнутій формі. Недоліком однак є те, що вони містять доволі складні інтеграли, які можуть бути визначені лише чисельно з використанням арифметики високої точності. Загалом ефективність аналітичних методів ціноутворення опціонів знижується із збільшенням вимірності моделей. У цьому випадку доцільніше використовувати чисельні методи моделювання, що полягають у побудові часових рядів ціни акцій і дисперсії, з яких можна отримати як розподіли умовних густин ймовірностей цін активів так і ціни опціонів. Доволі ефективними є стандартні чисельні методи такі, як схема Ейлера чи Мільштейна [11; 12]. Їх перевагою є те, що вони прості для розуміння та їхні властивості збіжності добре вивчені.

Виклад основного матеріалу дослідження. Отже для моделі Гестона (1), (2) просту схему дискретизації Ейлера запишемо так [11; 12]:

$$S_{n+1} = S_n + rS_n\Delta t + S_n\sqrt{V_n}Z_S\sqrt{\Delta t}, \quad (5)$$

$$V_{n+1} = V_n + \kappa(\theta - V_n)\Delta t + \sigma_V\sqrt{V_n}Z_V\sqrt{\Delta t}, \quad (6)$$

де Z_S, Z_V корельовані нормально розподілені $N(0,1)$ випадкові величини з коефіцієнтом кореляції ρ .

Рівняння (5), (6) розглядаються одночасно для заданих початкових значень $\{S_0, V_0\}$. При реалізації схеми Ейлера часто виникають від'ємні значення величин $V_n < 0$ на певних ітераціях, що є недопустимими за змістом. Для усунення цієї ситуації будемо у наведених формулах застосовувати заміну $V_n \rightarrow |V_n|$.

Проблема від'ємної дисперсії в меншій мірі проявляється у схемі дискретизації Мільштейна, яка задається рівняннями:

$$S_{n+1} = S_n + rS_n\Delta t + S_n\sqrt{V_n}Z_S\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}S_nV_n(Z_S^2 - 1)\Delta t, \quad (7)$$

$$V_{n+1} = V_n + \kappa(\theta - V_n)\Delta t + \sigma_V\sqrt{V_n}Z_V\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{4}\sigma_VV_n(Z_V^2 - 1)\Delta t. \quad (8)$$

Останній доданок у рівнянні (8) сприяє тому, що випадки з від'ємними значеннями V_n зустрічаються значно рідше порівняно зі схемою Ейлера. Оскільки реалізація чисельного алгоритму за схемою Мільштейна реалізується практично так само як і за схемою Ейлера, ми будемо використовувати дискретизацію (7), (8). Як ми вже зазначали, при застосуванні чисельної схеми необхідно розігрувати дві корельовані нормально розподілені величини $\{Z_S, Z_V\}$. Для цього задамо їх наступним чином $\{Z_S, \rho Z_S + \sqrt{1 - \rho^2} Z_V\}$, де Z_S і Z_V є незалежними [11].

Чисельні розв'язки стохастичних рівнянь (7), (8) отримуємо у програмі *Mathematica* [13] (лістинг А.1 додатку). Для прикладу на рис. 1 і 2 наведені реалізації траєкторій стохастичних змінних $\{S_n, V_n\}$ ($n \in (0, \dots, 365)$) (лістинги А.2 і А.3) для набору параметрів моделі:

$$\{S_0, V_0, r, \kappa, \theta, \sigma_V, \rho\} = \{1.0, 0.104, 0.05, 3.0, 0.063, 0.5, -0.9\}. \quad (9)$$

На осі абсцис відкладено тривалість у днях на протязі року, на осі ординат значення випадкової змінної.

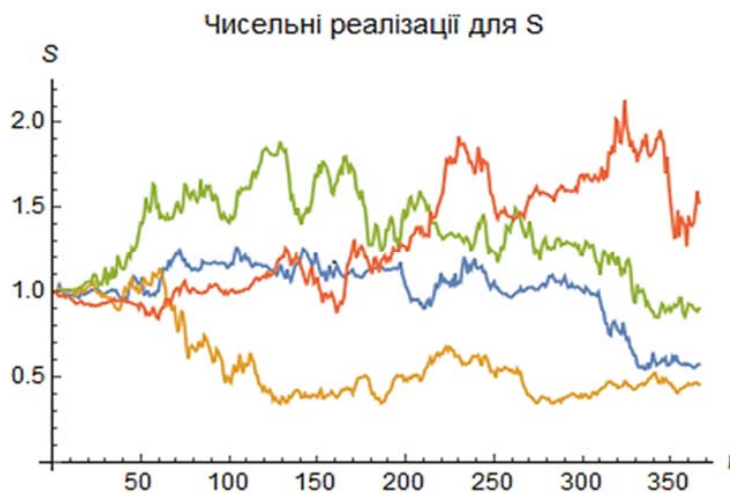


Рис. 1. Зображення стохастичних траєкторій $S(t)$ (лістинг А.2)



Рис. 2. Зображення стохастичних траєкторій $V(t)$ (лістинг А.3)

Статистичні дані для моделі Гестона отримуюмо на основі значної кількості ($m = 30000$) реалізацій стохастичних процесів. Вони містяться в об'єктах *Mathematica* (лістинги А.1, А.2, А.3), які є списками значень величин $\{S_n, V_n\}$, для $n \in (0, \dots, 365)$. Це дозволяє вивчати характеристики цінової динаміки і динаміку волатильності. На їх основі визначаємо, зокрема, густини умовних ймовірностей стохастичних змінних $\{S(t), V(t)\}, t \in (0, 1)$. Їх знайдемо на основі побудованих гістограм, що задають оцінки ймовірностей в середніх точках інтервалів групування. Використовуючи інтерполяцію за заданими точками, отримуємо значення густин умовних ймовірностей для широкого проміжку зміни $\{S(t), V(t)\}$. Для цього використовуємо функції системи *Mathematica*, які наведені в додатку А (лістинги А.4 і А.5). За програмним кодом у додатку А (лістинг А.6), який реалізує формули (3) і (4), визначаємо ціну опціону в моделі Гестона.

Модель Гестона, як ми вже вказували, є розширенням моделі Блека-Шоулза для стохастичної волатильності. Як динаміка ціни активу так і стохастичної волатильності суттєво залежать від параметрів моделі, відповідно різною буде і ціна опціону. Для якісного розуміння вказаного зв'язку наведемо порівняння з моделлю Блека-Шоулза, основні розв'язки для якої наведені в додатку Б. Рівняння стохастичної цінової динаміки для геометричного броунівського руху (Б.1) отримується з рівняння (1) шляхом заміни $V(t) \rightarrow \sigma^2$ (σ – постійна волатильність). Розглянемо, наприклад, обидві моделі в початковий момент часу, де $V(t_0) = V_0, S(t_0) = S_0$, а також задані інші параметри моделей. Для моделі Блека-Шоулза вважаємо також,

що волатильність рівна $\sigma = \sqrt{V_0}$, тобто в моделі Блека-Шоулза волатильність залишається рівною початковому значенню. Звідси впливає наступний якісний аналіз ціноутворення опціонів в моделі Гестона на основі вивчення динаміки $V(t)$. Якщо середнє значення волатильності $V(t)$ переважає початкове значення V_0 на всьому інтервалі розглядуваного часу t , то ціна опціону в моделі Гестона буде вищою, ніж передбачає модель Блека-Шоулза. Цей висновок продемонстровано на графіках (рис. 3, 4) (лістинг А.7), де вказано зміну $\sqrt{V(t)}$ та порівняння цін в моделях Гестона і Блека-Шоулза для обраного набору параметрів (9) відповідно. Як видно середнє значення волатильності зростає, що і приводить до зростання ціни опціону порівняно з моделлю Блека-Шоулза.

Подібним чином проілюструємо, що у випадку зменшення середнього значення волатильності порівняно з початковим значенням, ціна опціону у моделі Гестона буде меншою ніж за моделлю Блека-Шоулза. На рис. 5 і 6 наведені відповідні графіки для параметрів моделі:

$$\{S_0, V_0, r, \kappa, \theta, \sigma_V, \rho\} = \\ = \{1.0, 0.104, 0.05, 0.3, 0.063, 0.1, 0.9\} \quad (10)$$

Такий аналіз можна застосовувати і в задачах більшої вимірності, зокрема моделі Гестона із стохастичною відсотковою ставкою [14] та інших.

Висновки. Як відомо стохастичні моделі широко застосовуються в задачах фінансової інженерії для дослідження цінової динаміки активів та деривативів на їх основі. Доволі повно аналітично досліджені одновимірні моделі, зокрема модель Блека-Шоулза

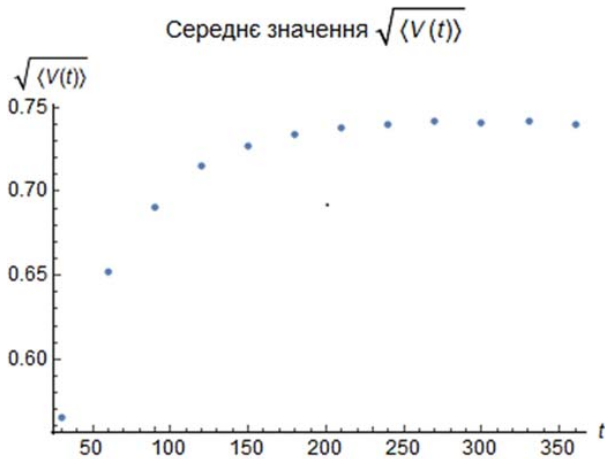


Рис. 3. Динаміка середнього значення волатильності в моделі Гестона для параметрів (9) (лістинг А.7)

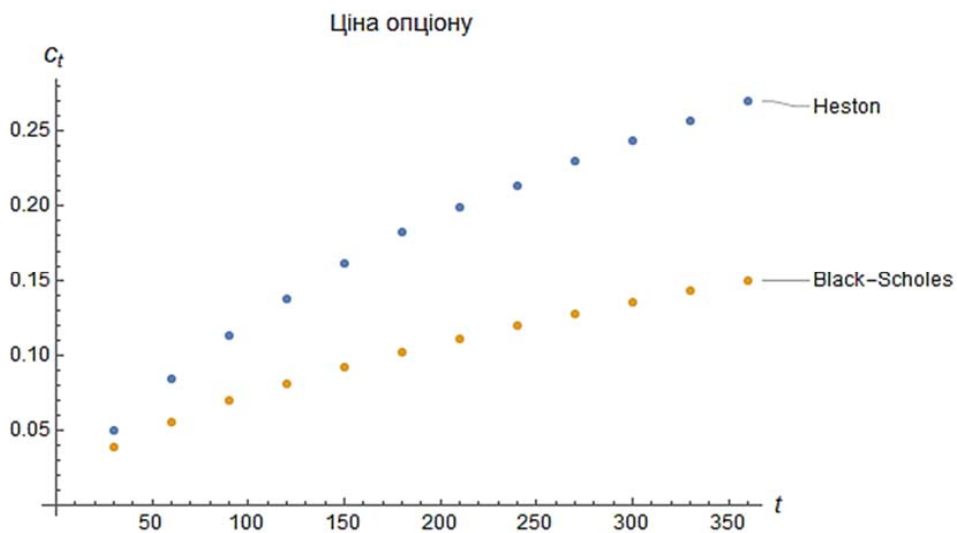


Рис. 4. Порівняння цін європейського опціону кол в моделях Гестона і Блека-Шоулза для параметрів (9) (лістинг А.6)

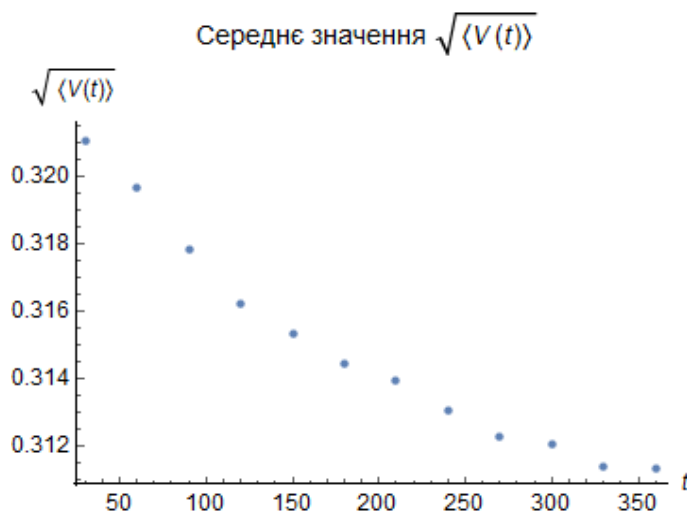


Рис. 5. Динаміка середнього значення волатильності в моделі Гестона для параметрів (10) (лістинг А.7)

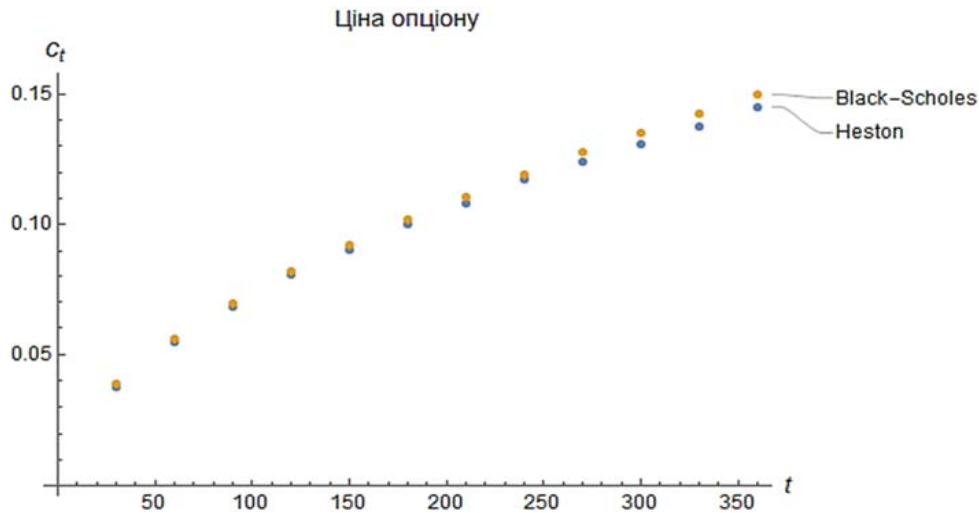


Рис. 6. Порівняння цін європейського опціону кол в моделях Гестона і Блека-Шоулза для параметрів (10) (лістинг А.6)

та інші. Для моделей більшої вимірності, зокрема двовимірних моделей, аналітичні результати відомі для обмеженого кола моделей. Зокрема, у відомій моделі Гестона кінцеві формули для умовної густини ймовірності цінового активу та ціни опціону європейського типу містять складні інтеграли типу оберненого перетворення Фур'є. Тому актуальною стає задача чисельного аналізу двовимірних моделей ціноутворення.

В даній роботі продемонстровано метод чисельного розв'язку моделі Гестона на основі схеми Мільштейна для стохастичних дифе-

ренціальних рівнянь. Отримано чисельні розв'язки для випадкових величин моделі Гестона $\{S(t), V(t)\}, t \in (0, 1)$, де часовий проміжок розділений на $n = 365$ частин. Отримано чисельні розв'язки для густин умовних ймовірностей змінних $\{S, V\}$ для $t \in (0, 1)$. Запропоновано порівняльний якісний аналіз ціни опціону в моделі Гестона з такою ж в моделі Блека-Шоулза з використанням середнього волатильності $\sqrt{V(t)}$. Такий підхід дає глибше розуміння динаміки ціни в моделі Гестона і може застосовуватися в інших багатовимірних моделях ціноутворення.

Додаток А

Лістинг А.1 – Чисельна реалізація траєкторій (7), (8) у програмі *Mathematica*

```
LHs := Developer`ToPackedArray[NestList[Block[{
  Zs = RandomVariate[NormalDistribution[]],
  Zv = RandomVariate[NormalDistribution[]],
  ({#[[1]] (1.+rΔt+(Sqrt[Abs#[[2]]]Sqrt[Δt]Zs + N[1/2]Abs#[[2]]
Δt (Zs^2 - 1.))), Abs#[[2]]+κ(θ-Abs#[[2]])Δt + (σv Sqrt[Abs#[[2]]]
Sqrt[Δt] (ρ*Zs + Sqrt[1.-ρ^2]Zv)+N[1/4]σv^2((ρ*Zs+Sqrt[1.-ρ^2]Zv)^2-
1.)))] &, {S0, V0}, n]];
```

Лістинг А.2 – Об'єкт `dataHs` містить сукупність траєкторій для змінної $S(t)$ (7).

```
dataHs = Developer`ToPackedArray[Table[LHs[[All, 1]], 30000]];
```

Лістинг А.3 – Об'єкт `dataHsV` містить сукупність траєкторій для змінної $V(t)$ (8).

```
dataHsV = Developer`ToPackedArray[Table[LHs[[All, 2]], 30000]];
```

Лістинг А.4 – Отримання чисельних значень густини умовної ймовірності для випадкової змінної $S(t)$

```

ProbHs[m_]:=SmoothHistogram[dataHs[[All,m]], Automatic, "PDF",
PlotLabel->"Густина ймовірності f[S]", AxesLabel->{S, f[S]},
PlotRange->Full];
ProbHs1[m_]:=Developer`ToPackedArray@Flatten[Cases[Cases[ProbHs
[m],Line[___], Infinity], Line[x_]->x], 1];
ProbHs2[m_]:=Developer`ToPackedArray@Select[ProbHs1[m],#[[1]]>
0 &];

```

Лістинг А.5 – Отримання чисельних значень густини умовної ймовірності для випадкової змінної $V(t)$

```

ProbHsV[m_]:=SmoothHistogram[dataHsV[[All,m]],Automatic,"PDF",
PlotLabel->Style["Густина ймовірності f[S]",14], AxesLabel->{S,f[S]},
AxesStyle->Directive[Black,12], PlotRange->All]
ProbHsV1[m_]:=Developer`ToPackedArray@Flatten[Cases[Cases[ProbHsV[m],
Line[___], Infinity], Line[x_]->x],1];
ProbHsV2[m_]:=Developer`ToPackedArray@Select[ProbHsV1[m],#[[1]]>
0 &];

```

Лістинг А.6 – Отримання чисельних значень для середнього волатильності $V(t)$

```

ΔV[m_]:=Differences[ProbHsV2[m]][[2,1]];
MeanV[m_]:=Total@Apply[Times,Developer`ToPackedArray@ProbHsV2[m],
2]ΔV[m];

```

Лістинг А.7 – Визначення ціни опціону з використанням формули (3)

```

ΔS[m_]:=Mean[Drop[Differences[Developer`ToPackedArray@Select[
ProbHs2[m]/.{x_,y_}->{x-K,y},#[[1]]>0 &]][[All,1]],-1]];
CHs[m_]:=Exp[-r*m*Δt]Total@Apply[Times,Developer`ToPackedArray@
Select[ProbHs2[m]/.{x_,y_}->{x-K,y},#[[1]]>0 &],2]*ΔS[m]

```

Додаток Б

Стохастична динаміка ціни активу в моделі Блека-Шоулза задається геометричним броунівським рухом

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW_s(t) \quad (\text{Б.1})$$

Як відомо [1, 11], ціна європейського опціону кол в моделі Блека-Шоулза задається виразом

$$C_{BS}(t) = S(t)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2), \quad (\text{Б.2})$$

$$d_1 = \frac{\ln(S(t)/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau},$$

де $\tau = T - t$, T – термін завершення опціону, $S(t)$ – ціна активу в момент часу t , K – страйк ціна, $\Phi(x)$ – інтегральна функція нормованого нормального розподілу. Волатильність σ в моделі Блека-Шоулза вважається сталою величиною.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973. ISSN 0022-3808. DOI: 10.1086/260062.
2. Hull J. C. and White A. D., The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *J. Finance*, 42(2), 1987, 281–300. ISSN 1540-6261. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1987.tb02568.x.
3. Scott L. O., Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation, and an application. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(4), 1987, 419–438. ISSN 0022-1090. DOI: 10.2307/2330793.
4. Stein J. and Stein E., Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach. *The Review of Financial Studies* 4(4), 1991, 727–752. ISSN 0893-9454. DOI: 10.1093/rfs/4.4.727.
5. Heston S. L., A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2), 1993, 327–343. ISSN 0893-9454. DOI: 10.1093/rfs/6.2.327.
6. Higham D. J. and Mao X., Convergence of monte carlo simulations involving the mean-reverting square root process. *Journal of Computational Finance*, 8(3), 2005, 35–61. ISSN 1460-1559. DOI: 10.21314/JCF.2005.136.
7. Lord R., Koekkoek R., and van Dijk D., A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models. *Quantitative Finance*, 10(2), 2010, 177–194. ISSN 1469-7688. DOI: 10.1080/14697680802392496.
8. Andersen L., Simple and efficient simulation of the Heston stochastic volatility model. *Journal of Computational Finance*, 11(3), 2008, 1–42. ISSN 1460-1559. DOI: 10.21314/JCF.2008.189.
9. Fabrice D. Rouah, Steven L. The Heston Model and its Extensions in Matlab and C#, Website. Wiley Finance Series. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2013. ISBN 9781118548257.
10. John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephen A. Ross, A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 1985, 385–407. ISSN 0012-9682. DOI: 10.2307/1911242.
11. Yuh-Dauh Lyuu. Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, and Algorithms. Cambridge University Press, 648 p. (2004). ISBN: 9780521781718.
12. Gatheral J., The volatility surface: A practitioner's guide. Wiley Finance. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2006. ISBN 9780470068250.
13. Martha L. Abell, James P. Braselton *Mathematica by Example*, 5th Edition, Academic Press, 2017. ISBN-13:978-0128124819.
14. L. A. Grzelak and C. W. Oosterlee, On the Heston model with Stochastic Interest Rate. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, (2) (2011), 255–286. DOI: 10.1137/090756119

REFERENCES:

1. Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973. ISSN 0022-3808. DOI: 10.1086/260062.
2. Hull J. C. and White A. D., The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *J. Finance*, 42(2), 1987, 281–300. ISSN 1540-6261. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1987.tb02568.x.
3. Scott L. O., Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation, and an application. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(4), 1987, 419–438. ISSN 0022-1090. DOI: 10.2307/2330793.
4. Stein J. and Stein E., Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach. *The Review of Financial Studies*, 4(4), 1991, 727–752. ISSN 0893-9454. DOI: 10.1093/rfs/4.4.727.
5. Heston S. L., A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2), 1993, 327–343. ISSN 0893-9454. DOI: 10.1093/rfs/6.2.327.
6. Higham D. J. and Mao X., Convergence of monte carlo simulations involving the mean-reverting square root process. *Journal of Computational Finance*, 8(3), 2005, 35–61. ISSN 1460-1559. DOI: 10.21314/JCF.2005.136.
7. Lord R., Koekkoek R., and van Dijk D., A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models. *Quantitative Finance*, 10(2), 2010, 177–194. ISSN 1469-7688. DOI: 10.1080/14697680802392496.
8. Andersen L., Simple and efficient simulation of the Heston stochastic volatility model. *Journal of Computational Finance*, 11(3), 2008, 1–42. ISSN 1460-1559. DOI: 10.21314/JCF.2008.189.
9. Fabrice D. Rouah, Steven L. The Heston Model and its Extensions in Matlab and C#, Website. Wiley Finance Series. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2013. ISBN 9781118548257.
10. John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Jr. and Stephen A. Ross, A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 1985, 385–407. ISSN 0012-9682. DOI: 10.2307/1911242.
11. Yuh-Dauh Lyuu. Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, and Algorithms. Cambridge University Press, 648 p. (2004). ISBN: 9780521781718.
12. Gatheral J., The volatility surface: A practitioner's guide. Wiley Finance. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2006. ISBN 9780470068250.
13. Martha L. Abell, James P. Braselton *Mathematica by Example*, 5th Edition, Academic Press, 2017. ISBN-13:978-0128124819.
14. L. A. Grzelak and C. W. Oosterlee, On the Heston model with Stochastic Interest Rate. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, (2) (2011), 255–286. DOI: 10.1137/090756119