

УДК 336.72

Використання пробіт-регресії під час оцінки ризиків інвестиційного портфелю

Юрченко М.Є.

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Чернігівський національний технологічний університет

У статті на основі побудови моделей, відмінних від відомих моделей Г. Марковіца та У. Шарпа, побудовано модель, яка дає змогу оцінити інвестиційні рішення залежно від раціональних очікувань на фондовому ринку. Показано, що ризик можна представити суперпозицією двох складників, перший з яких визначає поточну ситуацію на фінансовому ринку, а другий характеризує суму ризиків цінних паперів у портфелі.

Ключові слова: оцінка ризиків, портфельні інвестиції, модель Марковіца, пробіт-регресія, логістична регресія.

Юрченко М.Е. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОБИТ-РЕГРЕССИИ ПРИ ОЦЕНКЕ РИСКОВ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

В статье на основе построения моделей, отличных от известных моделей Г. Марковица и У. Шарпа, построена модель, которая позволяет произвести оценку инвестиционных решений в зависимости от рациональных ожиданий на фондовом рынке. Показано, что риск можно представить в виде суперпозиции двух составляющих, первая из которых определяет текущую ситуацию на финансовом рынке, а вторая характеризует сумму рисков ценных бумаг в портфеле.

Ключевые слова: оценка рисков, портфельные инвестиции, модель Марковица, пробит-регрессия, логистическая регрессия.

Iurchenko M.E. THE USE OF PROBIT REGRESSION IN ASSESSING THE RISKS OF AN INVESTMENT PORTFOLIO

In this article we build the model, different from the well-known models of G. Markowitz and W. Sharp, which allows evaluating investment decisions depending on rational expectations on the stock market. It is shown that the risk can be represented as a superposition of two components. The first one determines the current situation in the financial market, and the second characterizes the amount of securities risks in the portfolio.

Keywords: risk evaluation, portfolio investments, Markowitz model, probit regression, logit model.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Важливою умовою функціонування та розвитку сучасної української економіки є ефективна інвестиційна політика. Інвестиційна діяльність у всіх її формах та видах передусім спряжена з ризиком, який можна розглядати як імовірність виникнення непередбачуваних фінансових втрат у ситуації невизначеності умов інвестування. Задачі управління фінансовими інвестиціями являють собою з математичного погляду складні оптимізаційно-ймовірнісні задачі, розв'язок яких спряжений із складнощами аналітичного та обчислювального характеру. Вперше задачі такого роду було розглянуто Г. Марковіцем, який запропонував уважати ризик, що виникає під час інвестування, не менш значущою характеристикою, ніж прибуток, що отримується. Протягом останніх 20–30 років розроблялися модифіковані моделі, використання яких суттєво збільшувало практичні можливості основних ідей портфельного

інвестування. Слід зазначити, що питання змін ринків і зараз залишається актуальним та головним в інвестиційній діяльності, а проблемі оцінки ризиків в інвестиціях, особливо після кризи 2007–2008 рр., приділяється все більше уваги. Розв'язання таких задач неможливе без використання сучасних методів математичного аналізу, теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, модифікованих програмних продуктів. Серед найбільш цікавих сучасних підходів слід відзначити розроблений компанією J.P. Morgan метод VaR, заснований на оцінках вартості ризику, однак цей метод не дає змоги одночасно визначити структуру портфелю.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблемі побудови та дослідження математичних моделей та оцінки ризиків портфельних інвестицій в останній час присвячено низку робіт українських та зарубіжних авторів. Слід зазначити, що нині все ще залишається актуальною модель портфель-

них інвестицій, запропонована Г. Марковіцем. Автором у роботі [1] було надано математичну постановку та розв'язання задачі, що визначає структуру портфелю, а як міру ризику запропоновано використовувати прибутковість та дисперсію. Однак, як показали подальші дослідження, залежність цих двох характеристик можлива лише тоді, коли прибутковість як випадкова величина має нормальний розподіл. У Шарпом [2, с. 427–429] розроблено модель оцінки довгострокових фінансових активів (Capital Asset Pricing Model). Ця модель широко використовується та дає змогу оцінити цінні папери, ґрунтуючись на ймовірнісному формулюванні поняття «ризик», яке автор запропонував описувати деякими законами розподілу, відмінними від нормального. Нині портфелі інвестицій є багатофакторними моделями та містять як параметри велику кількість ризиків, які не враховуються вихідними характеристиками портфелю. Через мінливість ринків класична модель Марковіця потребує вдосконалення з погляду раціональності поведінки інвесторів. Автори низки робіт [3–5] запропонували ввести альтернативні характеристики ризику при описі будь-якого процесу, включаючи прибутковість портфелю. Зокрема, у [3, с. 112–119] показано, що мінливі портфелі не є ризикованими, якщо ймовірність того, що дохідність виявиться меншою за певний рівень, є близькою до нуля. Суттєвим недоліком запропонованих математичних моделей є й той факт, що вони прив'язані до конкретної ситуації та носять частковий характер. Перспективними з погляду уніфікації моделей, що розглядаються, є дослідження українських та зарубіжних авторів В. Вітлінського, А. Матвейчука, Ф. Кагана, М. Ловелла, Дж. Мута, Ф. Найта. Авторами запропоновано нові підходи до побудови математичних моделей із використанням прогнозних оцінок їх прибутковості, але, на жаль, літератури, що стосується методології оцінки ризиків, навіть зараз не дуже багато.

Виділення невіршених раніш частин загальної проблеми. Класична модель, запропонована Г. Марковіцем та У. Шарпом, може використовуватися лише на ринках, де існує абсолютний захист капіталу. Однак у сучасних економічних системах ми постійно зустрічаємося з ризиками, які часто перевищують ризики портфельного інвестування, і коректне застосування моделей в економіці потребує розроблення специфічного математичного апарату. Побудова нових та вдо-

сконалення наявних математичних моделей, які дають змогу мінімізувати ризики, є актуальним завданням економіко-математичного моделювання.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Метою даної статті є побудова на основі регресійного аналізу відмінних від моделі Г. Марковіця моделей, що дають змогу сформулювати та оцінити інвестиційні рішення, які залежать від раціональних очікувань на фондовому ринку.

Вклад основного матеріалу дослідження. Як уже зазначалося, для опису можливостей інвесторів Г. Марковіц використовував прибутковість та ризик. Відзначимо, що на відміну від дохідності ризик усе ще залишається величиною, що носить ймовірнісний характер. Його характеристика за допомогою дисперсії є малоефективною відносно природи та причин ризиків, а також не враховує так звані ризики очікувань інвесторів, які б інвестор хотів би врахувати в моделі. Нині сучасний фондовий ринок являє собою складну стохастичну систему, де кожен інвестор приймає рішення з урахуванням тільки індивідуального ставлення до ризику. Однак постановка задачі в такому формулюванні не завжди виправдана, оскільки за допомогою цієї моделі не завжди вдається відобразити ризики інших інвесторів. Своєю чергою, індивідуальне ставлення до ризиків може сформуватися під впливом раціональних очікувань, що відображають точку зору інших інвесторів, а тому під час побудови математичної моделі повинні бути враховані критерії, за якими діють інші інвестори. Формально ці очікування можна описати умовно-ймовірнісною моделлю, яка залежить від умов формування економічного процесу в системі. Відомо, що стан такої системи можна описати, своєю чергою, факторами, які впливають на ймовірність очікування [3, с. 135–142]. Розглянуті автором фактори можуть бути систематичними (завжди враховуються під час опису середовища) та факторами змінного складу, але всі ці фактори, на жаль, у низці випадків не завжди можуть описати всі зміни, що відбуваються з показниками, що прогнозуються. Надалі під час побудови моделі ми будемо вважати, що несистематичний фактор є фактором одноразової дії з випадковим моментом реалізації. Вперше математичний апарат для розв'язання задач такого вигляду було розроблено Д. Макфадденом у 1982 р., але зараз ще недостатньо використовується на практиці.

Припускаємо далі, що раціональне очікування від вкладів у k -ий актив дає змогу отримати прибутковість v_k^* . Математична модель очікування за прибутковістю активу, що розглядається, може бути представлена у вигляді:

$$v_{kt} = v_k^* + l_k x_{kt} + \delta_{kt}, \quad (1)$$

де v_{kt} – прибутковість k -го активу у деякий момент часу t ; x_{kt} – дискретна випадкова величина, що приймає значення -1 та $+1$ за умови очікуваної прибутковості нижче за середній рівень або вище за середній рівень відповідно; l_k – величина можливої зміни прибутковості; δ_{kt} – величина, що характеризує вплив непередбачуваних випадкових факторів.

Для кожного k -го фінансового активу l_k можна визначити як середню величину відхилення фактичних значень прибутковості від середнього значення, тобто:

$$l_k = \frac{1}{\theta} \sum_k (v_{kt} - v_k^*) \text{sign}(v_{kt} - v_k^*). \quad (2)$$

Випадкова величина визначається також за відхиленнями та приймає значення:

$$v_{kt} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } v_{kt} - v_k^* \geq 0, \\ -1, \text{ якщо } v_{kt} - v_k^* < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Значення v_{kt} , що визначаються за формулою (3), характеризують вплив на прибутковість активу несистематичного фактору. У роботі [4, с. 27–45] показано, що послідовність випадкових величин $v_k^* = (v_{1t}, v_{2t}, \dots, v_{nt})$ є випадковим вектором, що характеризує стан глобального фінансового ринку та існує залежність між послідовністю дискретних значень x_{kt} і станами v_{kt} . Однак автору не вдалося з математичного погляду встановити цей зв'язок.

Під час побудови моделі ми припускаємо, що зміна ринку може впливати лише на ймовірність, з якою змінюється прибутковість фінансового активу i , як наслідок, взаємозв'язок між альтернативним складником фінансової прибутковості активу, що очікується, та змінами на ринку може бути описаний пробіт-моделлю чи пробіт-регресією (probit regression), яка має такий вигляд:

$$x_{it} = E(x_{it} / v_i) + \delta_{it}, \quad (4)$$

$$E(x_{it} / v_i) = 1 \cdot F(v_i' a) - 1 \cdot (1 - F(v_i' a)) = F(v_i' a), \quad (5)$$

де F функція розподілу ймовірностей v_i' на фондових ринках у момент часу t та вектора a .

Запропонована модель буде логіт-моделлю чи логіт-регресією, якщо випадкові залишки δ_{it} матимуть логістичний закон розподілу. За такого підходу логіт-регресія може бути представлена за допомогою виразу:

$$F(v_i' a) = \frac{\exp(a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n)}{1 + \exp(a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n)}. \quad (6)$$

Перевагою даної моделі є те, що результуюча змінна x_{it} може довільно змінюватися всередині заданого числового інтервалу. Означена функція є нелінійною, її параметри оцінюються за допомогою методу максимальної вірогідності [2, с. 425–442]. Слід зазначити, що побудова цієї функції можлива за допомогою спеціальних комп'ютерних пакетів. При цьому найбільш часто як F використовується функція стандартного нормального розподілу. Відзначимо, що проблема оцінки адекватності даної моделі все ще залишається актуальною, але нині найбільш часто використовуються критерії Ефрона та Макфаддена, згідно з якими у разі запропонованої моделі оцінка максимальної ймовірності максимізує сумісну щільність розподілу випадкових величин, що спостерігаються. Нині питання про точність вибору оцінок параметрів, що розглядаються, залишається спірним. На нашу думку, можливими є два варіанти оцінок: за можливо низьким рівнем точності прогнозу або шляхом максимізації міри адекватності моделі.

Для спрощення наданої моделі розглянемо випадок, коли математичне сподівання прибутковості визначається виразом:

$$E(v_i^* + l_i x_i + \delta_i) = v_i^* + l_i (2F(v_i' a) - 1) \quad (7)$$

Згідно з формулою (7), коли альтернативні очікування мають однакову ймовірність, поточна прибутковість дорівнює середньому значенню, та очікування росту прибутковості може мати місце лише за $F(v_i' a) < 0,5$. З урахуванням вищесказаного, дисперсія (ризик) визначається так:

$$\sigma_i^2 = l_i^2 (4F(v_i' a_i)(1 - F(v_i' a_i)) + \sigma_{\delta_i}^2). \quad (8)$$

Вираз (8) отримано в припущенні, що квадрат випадкової величини є константою та випадкова величина δ не залежить від x .

Із формули (8) випливає, що максимальний рівень дисперсії досягається, коли $F(v_i' a) < 0,5$. Ця ситуація означає, що в точці біфуркації раціональне очікування не сформоване.

З урахуванням виведених формул можна отримати відповідні характеристики для інвестиційного портфелю. Для портфелю з двох фінансових активів математичне сподівання прибутковості визначається зі співвідношення

$$E(v_p) = \gamma_1 v_1^* + \gamma_2 v_2^* + \gamma_1 l_1 (2F(v_1' a_1) - 1) + \gamma_2 l_2 (2F(v_2' a_2) - 1). \quad (9)$$

Із формули (9) випливає, що прибутковість інвестиційного портфелю та фінансового активу визначаються двома параметрами, які являють собою дохідності, одна з яких фор-

мується на основі середніх прибутків активів, а інша є портфельним ризиком, що залежить від ситуації. Саме другий складник повинний бути максимально прогнозованим на весь період інвестиційного горизонту та визначається інвестором. Звідси – дисперсію (ризик) інвестиційного портфелю можна розкласти на два складника.

Висновки з цього дослідження. Отримані математичні викладки дають змогу зробити висновок про те, що дисперсія (ризик) інвестиційного портфелю можна розкласти на два складники: перша компонента є ризиком, що визначається поточною ситуацією на фінансовому ринку, а друга визначає зважену суму ризиків цінних паперів у портфелі.

Ризики цінних паперів при цьому не залежать від ситуації, а тому мінімізація їх суми може здійснюватися лише за рахунок оптимізації структури портфелю. Звідси – ризик, що розраховується згідно з формулою (8), є передбачуваним, і це передбачення є наслідком результату раціональних сподівань, в якості яких можна використовувати розглянуту пробіт-модель. При цьому питання факторів, за допомогою яких можна адекватно описати раціональні очікування, потребує додаткових досліджень. Отримані результати, висновки та рекомендації можуть бути використані як інституціональними, так і приватними інвесторами під час обґрунтування своїх інвестиційних портфелів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Markowitz H. Portfolio Selection / H. Markowitz // *The Journal of Finance*. – 1952. – № 7. – P. 77–91.
2. Sharpe W. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium / W. Sharpe // *The Journal of Finance*. – 1964. – P. 425–442.
3. Мак Т. Элементы страхового риск-менеджмента / Т. Мак. – Москва : Олимп Бизнес, 2012. – 411 с.
4. Madura I. International Financial Management / I. Madura, 1992. – 723 p.
5. Ілляшенко С.М. Економічний ризик : [навч. посіб.] / С.М. Ілляшенко. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 220 с.
6. Матвійчук А.В. Аналіз і управління економічним ризиком : [навч. посіб.] / А.В. Матвійчук. – К. : Центр навчальної літератури, 2005. – 224 с.