

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.86

Методичні засади оцінювання ефективності функціонування підприємства із використанням виробничих функцій

Благодир Л.М.

кандидат економічних наук,
доцент кафедри менеджменту та моделювання в економіці
Вінницького національного технічного університету

Оцінено подальші перспективи використання математичних методів в економіці. Зокрема розглянуто виробничу функцію як специфічну економіко-статистичну модель, яка відображає залежність обсягу випуску продукції від факторів виробництва, а також економічний зміст параметрів виробничих функцій, та наведено їх інтерпретацію. Запропоновано методика проведення економічного аналізу на основі виробничої функції.

Ключові слова: ефективність функціонування підприємства, виробнича функція, закон спадної граничної корисності, від'ємний зворотній зв'язок, сукупна факторна продуктивність, алокативна ефективність.

Благодар Л.Н. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Оценены последующие перспективы использования математических методов в экономике. В частности рассмотрена производственная функция как специфическая экономико-статистическая модель, отображающая зависимость объема выпуска продукции от факторов производства, а также экономический смысл параметров производственных функций, и приведена их интерпретация. Изложена методика проведения экономического анализа на основе производственной функции.

Ключевые слова: эффективность функционирования предприятия, производственная функция, закон убывающей предельной полезности, отрицательная обратная связь, совокупная факторная производительность, аллокативная эффективность.

Blagodyr L.M. ENTERPRISE PERFORMANCE EVALUATION TECHNIQUE BASED ON THE USE OF PRODUCTION FUNCTIONS

The paper evaluates the further prospects of mathematical methods' application to the economics. In particular, there had been considered the production function as the specific economic and statistical model, mapping the production output dependence on the production factors, as well as the economic essence of the production functions' parameters along with their interpretation. There had also been suggested the methodic for conducting the economic analysis, based upon the production function.

Keywords: enterprise efficiency, production function, law of diminishing marginal utility, negative feedback, total factor productivity, allocative efficiency.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Сучасне динамічне бізнес-середовище пред'являє жорсткі вимоги до процесу управління підприємством, яке традиційно орієнтоване на досягнення високих кінцевих результатів за умови мінімально можливих витрат і раціонального використання ресурсів. Для вирішення цієї проблеми необхідним є чітке уявлення і використання в процесі управління підприємством об'єктивних залежностей, які існують між вихідними умовами і результатами функціонування кожного окремого суб'єкта господарювання. При цьому для підприємства

виробнича функція є моделлю, яка в максимально сконцентрованій формі відображає процес виробництва продукції, враховуючи особливості застосовуваної технології та його господарського механізму. Таким чином, визначення пріоритетів в напрямку підвищення ефективності функціонування підприємства є неможливим без використання економіко-математичних моделей, що і зумовлює актуальність цієї статті.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Як показав огляд літературних джерел [1–20], методи аналізу ефективності функціонування економічних систем можна умовно поділити на

дві групи. Методи першої групи передбачають використання коефіцієнтів (метод дисконтованого грошового потоку (чистого дисконтованого доходу, чистої приведенної вартості, інтегрального ефекту), метод капіталізації доходів, метод терміну окупності, розрахунок точки беззбитковості проекту). Методи другої групи ґрунтуються на застосуванні економетричного підходу.

Економетричний підхід заснований на понятті границі ефективності. Ефективність підприємства або групи підприємств розраховується з урахуванням наближення значень показників окремого підприємства (наприклад, витрат, обсягу випуску тощо) до потенційної або фактичної границі ефективності, яка розраховується на основі виробничої функції. В рамках економетричного підходу параметричні та непараметричні методи розвиваються паралельно.

Переваги непараметричних методів згідно з дослідженнями вчених [1, с. 159; 2, с. 2] полягають в тому, що для оцінки ефективності не потрібно знати точну функціональну форму границі ефективності (вона має вигляд довільної ламаної кривої), а також розподіл показника неефективності. Методи засновані на розрахунку координат підприємств, які мають найбільшу ефективність і визначають вершини ламаної кривої.

Параметричні методи різняться між собою, головним чином, принципами визначення випадкових помилок і мають ряд переваг. Так, вони враховують стохастичність – всі вони дають ймовірнісну оцінку ефективності, а не точне її значення. На відміну від непараметричних, параметричні методи не потребують застосування додаткових методик для тестування гіпотез про значущість отриманих оцінок і вплив різних чинників. По-друге, в методах врахована можливість випадкових помилок, зумовлених, наприклад, побудовою границі ефективності або недостовірністю даних, наведених в звітності. Невірні дані щодо ефективності роботи одного підприємства не призводять до викривлення оцінок решти підприємств.

Таким чином, параметричні методи передбачають побудову моделі виробничої функції, яка відображає максимально можливий випуск продукції з певного обсягу факторів виробництва при існуючій технології.

Вважають, що рівняння виробничої функції виду $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яке виражає залежність між конкретною величиною обсягу випуску товару y і групою факторів виробництва x_1, x_2, \dots, x_n вперше у 1894 р. запропонував Ф. Вікстед [2, с. 5]. У 1906 р. В. Парето графічно представив виробничі функції у вигляді похилих кривих і започатку-

вав подальше дослідження теорії виробництва на основі кривих рівних можливостей. Послідовники ідей В. Парето – Г. Хотеллінг, Р. Фріш, П. Самуельсон, Дж. Хікс – продовжували відповідні дослідження властивостей виробничої функції впродовж 1930–1950 рр. А у 50-х рр. ХХ ст. неовальрасіанці, зокрема Т. Купманс і Ж. Дебре, застосували новий підхід до аналізу спеціальних властивостей виробничої функції на основі методів векторного простору і випуклого аналізу [2; 3].

Формулювання цілей статті (постановка завдання). У ХХ ст. поняття виробничої функції стало одним із базових для економічної науки. Разом із тим на сучасному етапі умови функціонування економіки змінюються. Відбувається перехід від ієрархічної до мережевої взаємодії фірм, виробничі ланцюги глобалізуються, а потреби суспільства ускладнюються і зростають. В орієнтованій на мережеві структури інформаційній економіці, на відміну від індустріальної, домінує не закон спадної граничної прибутковості, а прямі мережеві ефекти і позитивний зворотний зв'язок, які втілюються у зростаючій граничній прибутковості. Разом із тим для енерго- і матеріаломістких галузей, таких як сільське господарство і переробна промисловість, гірничодобувна та обробна промисловість, закон спадної граничної корисності та від'ємний зворотній зв'язок як фактор рівноваги і стабілізації все ж залишаються актуальними. Таким чином, перед економічною наукою постають нові завдання в галузі розвитку методів побудови виробничих функцій для оцінки ефективності підприємств виробничого сектору, а також проведення аналізу функціонування економічних систем. Тому мета нашого дослідження полягає у визначенні методичних засад оцінювання ефективності функціонування підприємств з використанням виробничих функцій у сучасних умовах.

Виклад основного матеріалу дослідження. Вихідним положенням аналізу ефективності виробництва із використанням моделей виробничих функцій є теза про те, що всі зв'язки факторів у виробництві можуть бути зведені до двох типів. Перший передбачає доповнюваність одних факторів іншими; другий – взаємозамінюваність факторів [4, с. 89]. Відповідно до цього розрізняють лімітаційні та субституційні виробничі функції.

Якщо певну кількість продукту можна одержати в межах однієї виробничої функції різними ефективними комбінаціями факторів, то такі виробничі функції вважають субституційними. У субституційних виробничих функціях є мож-

ливість збільшувати обсяг випуску продукції за рахунок збільшення витрат тільки одного ресурсу за незмінності витрат решти ресурсів. Якщо певний виробничий результат з технічних причин може бути досягнутий тільки однією ефективною комбінацією затрат факторів, тобто коли між затратами факторів і обсягом продукції існують жорсткі співвідношення, таку виробничу функцію називають лімітаційною [5, с. 77].

Неокласична субституційна виробнича функція, відома в теорії виробництва як функція Кобба-Дугласа, є двофакторною моделлю залежності обсягу випущеної продукції від використаних ресурсів:

$$y = AL^{\alpha}K^{\beta}, \quad (1)$$

де y – обсяг виготовленої продукції; L – величина трудових витрат; K – обсяг функціонуючих виробничих фондів; A , α , β – параметри функції.

Це рівняння було запропоноване К. Вікселем у 1923 р. в його рецензії на докторську дисертацію Г. Акермана. П. Дуглас і Ч. Кобб були першими, хто перевіряв його на основі статистичних даних економіки США за 1899–1922 рр.

Разом з тим А. Хольтер [6, с. 968] у 1957 р. проаналізував наявні моделі виробничої функції, в т.ч. Кобба-Дугласа, і з'ясував, що модель Кобба-Дугласа є лише окремим випадком трансцендентальної мультиплікативної виробничої функції.

Подальша модифікація функції Кобба-Дугласа була направлена на відображення нею як екстенсивної, так й інтенсивної складової. Зокрема, модифікація, спрямована на відображення інтенсивного шляху розвитку економічної системи, здійснюється у двох напрямках.

Перший напрямок трансформації виробничої функції Кобба-Дугласа спрямовано на уречевлення науково-технічного прогресу (далі – НТП) в таких її параметрах, як ефект масштабу виробництва та еластичність заміщення факторів. Зокрема, передбачається врахування ефекту масштабу виробництва за умови $\alpha + \beta > 1$. Це означає відмову від жорсткої умови $\alpha + \beta = 1$. При цьому ефект масштабу виробництва дорівнює: $\alpha + \beta - 1$. Ефект масштабу виробництва полягає в тому, що між зростанням обсягу виробництва і зміною виробничих ресурсів відсутня пропорційна залежність. Зокрема, результати досліджень залежності окремих статей затрат від обсягу виробництва, проведених Б. Грабовецьким [7,

с. 10], засвідчили, що темп приросту обсягу продукції випереджає темпи приросту всіх без винятку статей затрат.

Крім того, щодо еластичності заміщення слід зазначити, що, за решти рівних умов, чим вищою є еластичність заміщення факторів, тим більшим буде обсяг випуску продукції, тобто зі зростанням еластичності заміщення випуск зростає. У класичній виробничій функції Кобба-Дугласа еластичність заміщення є фіксованою та дорівнює 1. Отже, врахувати вплив еластичності заміщення на випуск не можна. Тому у 1961 р. К. Ерроу, Х. Ченері, В. Мінхас і Р. Солоу побудували узагальнення виробничої функції – виробничу функцію з постійною еластичністю заміщення (Constant Elasticity Substitution), яка ґрунтується на припущеннях про те, що еластичність заміщення постійна; виробнича функція є однорідною в степені γ . Параметр характеризує віддачу на масштаб. В результаті було одержано функцію $y = A[(1 - \alpha)K^{-\beta} + \alpha L^{-\beta}]^{-\frac{1}{\beta}}$. Надалі з'явилися різні узагальнення виробничої функції з постійною еластичністю заміщення (введення додаткових факторів, змінна еластичність заміщення, гомотетичні функції з ядром у вигляді виробничої функції з постійною еластичністю заміщення тощо), але принципового зрушення у вирішенні проблеми відображення нею інтенсивної складової вони поки не дали [8, с. 103].

Другий напрямок передбачає врахування НТП як самостійного фактора виробництва через включення у виробничу функцію експоненціального множника $e^{\gamma t}$, де параметр γ ($\gamma > 0$) характеризує темп приросту випуску під впливом НТП. У результаті виробнича функція набуває такого вигляду [7, с. 11]:

$$y = AK^{\alpha}L^{\beta}e^{\gamma t}, \quad (2)$$

де e основа натуральних логарифмів; γ – параметр рівняння; t натуральний ряд чисел ($t = 1, 2, 3, \dots, m$).

Така модель є простим прикладом динамічної виробничої функції; вона включає нейтральний, тобто нематеріалізований у жодному з факторів НТП. На її основі були розроблені відомі класифікації НТП Дж. Хікса і Р. Харрода. Концепція екзогенного НТП була запропонована та обґрунтована в роботах Я. Тінбергена, Р. Солоу, Р. Харрода, Дж. Хікса і ряду інших відомих економістів [2; 9; 10].

Згодом з'ясувалося, що значна частка варіації залежної змінної для промислового виробництва припадає саме на кінетичну компоненту. Якщо для цілей коротко-

навіть середньострокового прогнозування використання автономного НТП є в цілому допустимим, то для пояснення процесів, що відбуваються в економіці, і для вироблення довгострокових стратегій розвитку цього виявляється замало. Одним з перших на цю обставину звернув увагу М. Абрамовітц, який вважав різницю між спостережуваною величиною росту обсягу випуску і тією величиною, зростання якої пояснюється зростанням капіталу і праці, мірою незнання дійсних причин економічного зростання. Так виникла проблема «залишку Абрамовітца», яка (принаймні, більша її частина) може полягати у недооцінці величини капіталу [8, с. 100].

Загалом, до сьогодні питання включення у рівняння виробничої функції Кобба-Дугласа множника e^{yt} залишається дискусійним. Зокрема, необхідно обґрунтувати, по-перше, зміст і склад цього експоненціального показника; по-друге, наскільки він відповідає поставленій меті з теоретичної і практичної точок зору.

Концепція лімітаційних виробничих функцій, яка ґрунтується на припущенні про те, що промисловим методам виготовлення продукції властиві, як правило, незмінні виробничі коефіцієнти і виробнича функція виду

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}; \frac{x_2}{a_2}\right),$$

де a_1, a_2 – незмінні виробничі коефіцієнти, отримала свій розвиток в роботах Леонтєва, Гутенберга, Хайнена, Піхлера, Ченері, Клока, Кролле, Куппера та ін. Згідно зі встановленим співвідношенням «затрати–випуск» величина затрат факторів як обмежуючий чинник жорстко лімітується обсягом виробництва.

Виробнича функція як формальна конструкція у загальному вигляді описується рівнянням

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

де y – результативний показник; x_1, x_2, \dots, x_n – фактори виробництва. Вона визначена у невід'ємному ортанті n -мірної площини і повинна задовольняти таким основним вимогам [16, с. 164]:

$$1) f(0, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1, 0, x_3, \dots, x_n) = \dots = f(x_1, \dots, x_{n-2}, 0, x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0;$$

$$2) x(1) \geq x(0) (x(1) \neq x(0)) \Rightarrow f(x(1)) > f(x(0)) (x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k), k = 0, \dots, m));$$

$$3) x > 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0, (i = 1, \dots, n), x = (x_1, \dots, x_n);$$

$$4) x > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \leq 0, (i = 1, \dots, n), x = (x_1, \dots, x_n);$$

$$5) x > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \geq 0, (i = 1, \dots, n), x = (x_1, \dots, x_n);$$

$$6) f(tx_1, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, \dots, x_n), (i = 1, \dots, n), x = (x_1, \dots, x_n)$$

Властивість 1 означає, що за умови відсутності хоча б одного з ресурсів випуск продукції стає неможливим. Властивість 2 означає, що зі зростанням витрат хоча б одного фактора виробництва обсяг випуску зростає. Властивість 3 значить, що за умови зростання хоча б одного фактора, якщо обсяги решти факторів залишаються без змін, обсяг випуску зростає. Властивість 4 означає, що зі зростанням витрат одного ресурсу за умови незмінності кількості решти ресурсів величина приросту випуску на кожну додаткову одиницю цього ресурсу не зростає (закон спадної ефективності). Властивість 5 означає, що за умови зростання витрат одного ресурсу гранична ефективність решти ресурсів зростає. Властивість 6 означає, що виробнича функція є однорідною з показником степеня $p > 0$. При $p > 1$ з ростом масштабу виробництва в t разів (число $t > 1$), тобто з переходом від вектора x до вектора tx , обсяг випуску зростає в t^p раз, таким чином можемо говорити про ріст масштабу виробництва. Якщо $p < 1$, то ріст масштабу виробництва призводить до падіння ефективності виробництва. Якщо $p = 1$, то за умови росту масштабу виробництва ефективність виробництва є постійною.

З точки зору неокласичної економічної теорії, побудовані рівняння є логічно адекватними досліджуваним процесам тоді, коли за економічним змістом між факторами і досліджуваним показником існує прямий зв'язок, і збільшення (зменшення) будь-якого фактору призводить до збільшення (зменшення) досліджуваного показника. За таких умов додатні знаки при невідомих свідчать про логічну адекватність рівнянь досліджуваному процесу.

Водночас у роботах деяких дослідників [16–20] доведено, що в прикладному економічному аналізі, який здійснюють за допомогою степеневі виробничої функції, не варто *априорі* задавати межі зміни показників степеня. Для моделювання різних виробничих ситуацій необхідно оцінювати значення цих коефіцієнтів за наявними статистичними даними. Тоді степенева виробнича функція буде діагностувати виробництво, близьке до оптимального, якщо показники степеня дорівнюють одиниці (або близькі до оди-

**Показники ефективності, отримані
на основі моделі виробничої функції**

Показник	Призначення
$(y-y_T) > 0$ – підприємство використало наявні ресурси з вищою результативністю, ніж в середньому по сукупності; $(y-y_T) < 0$ – підприємство використало наявні ресурси з нижчою результативністю, ніж в середньому по сукупності; де y – фактичний обсяг випуску продукції; y_T – теоретичний обсяг випуску продукції, отриманий на основі моделі виробничої функції.	Відображає різницю між фактичним обсягом випуску і його теоретичним рівнем, яка пояснюється вмілим чи невмілим використанням об'єктивних можливостей підприємства і характеризує якість його роботи.
<i>Індекс технологічної результативності</i> використання ресурсів: $\frac{y}{y_T}$	Показує рівень ефективності використання ресурсів при середньому рівні управління та організації виробництва на підприємстві.
<i>Гранична продуктивність ресурсів:</i> $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, де x_i – і-тий вид факторів виробництва; для логарифмічного рівняння: $\frac{\partial y}{\partial x_i} = a_i \frac{y}{x_i}$, де \bar{x}_i , де \bar{x}_i – середнє значення і-того фактора виробництва; y – середнє значення фактичного обсягу випуску продукції.	Показує, на скільки одиниць зміниться результативний показник зі зміною певного фактора на одну одиницю при фіксованому значенні інших факторів.
<i>Коефіцієнт еластичності:</i> $E_{x_i} = \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x_i}{x_i}$, де $\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x_i}{x_i}$ – коефіцієнти приросту відповідно обсягу випуску продукції та і-того виду факторів виробництва; для логарифмічного рівняння: $E_i = a_i$, де a_i – параметр рівняння (коефіцієнт регресії).	Усуває різновимірність і показує, на скільки процентів зміниться результативний показник зі зміною певного фактора на 1% за умови незмінного (фіксованого) значення інших факторів.
<i>Еластичність виробництва:</i> $h = a_1 + a_2 + \dots + a_n$	Показує, як масштаб виробництва впливає на випуск продукції.
<i>Гранична норма заміщення ресурсів:</i> $H_{ij} = - \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} : \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)$, де H_{ij} – гранична норма заміщення і-того фактора виробництва j-тим фактором виробництва.	Характеризує взаємозамінюваність для двох факторів виробництва. Якщо знижується гранична норма заміщення одного із факторів, то це свідчить про те, що ефективність використання певного ресурсу обмежена.
<i>Частковий показник ефективності і-того фактора виробництва</i> $m_i = \frac{\alpha_i}{x_i} \times m^2$, де α_i – частка впливу і-того (ресурсу) фактора; де x_i – фактичний обсяг і-того виду ресурсів (факторів виробництва); ϵ – ефект сукупного впливу ресурсів (факторів виробництва).	Показує частку сукупного ефекту, яка зумовлена впливом витрат конкретного виду факторів виробництва, дозволяє порівняти ефект впливу конкретного ресурсу (фактора виробництва) з його витратами.
<i>Сукупна факторна продуктивність:</i> $\frac{y_j}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h} \times x_{ij}}$, де y_j – фактичний обсяг випуску продукції; a_i – коефіцієнт регресії; h – еластичність виробництва; x_{ij} – обсяг відповідного фактора виробництва; j – порядковий номер року; i – порядковий номер фактора виробництва	Дозволяє оцінити ефективність використання ресурсів при випуску продукції не ізольовано, а в комплексі.

<p><i>Алокативна ефективність: $MPV_i > MPP_i$</i> де MPV_i – вартість граничного продукту i-того ресурсу, MPP_i – ціна граничного продукту i-того ресурсу. Якщо ресурс оцінюється у грошових одиницях, то висновок про ефективність його використання роблять на основі таких нерівностей: $MP_i = 1$ – ресурс використовується оптимально; $MP_i > 1$ – використання ресурсу є недостатнім; $MP_i < 1$ – використання ресурсу є надлишковим.</p>	<p>Характеризує відхилення фактичних результатів діяльності підприємства від їх максимального значення при існуючих рівнях ринкових цін на використовувані ресурси і кінцеву продукцію (послуги).</p>
---	---

Джерела: узагальнено автором на основі [2; 3–5; 7; 16], власні дослідження

ниці у випадку економетричних оцінок), або неефективне виробництво, якщо показники степеня далекі від одиниці. Якщо деякий показник степеня більше одиниці, то це свідчить про те, що відповідний ресурс перебуває на стадії зростаючої віддачі. Від'ємне значення показника степеня свідчить про те, що еластичність ресурсу, який підноситься до від'ємного степеня, є від'ємною. У такому разі збільшення обсягів застосування цього ресурсу тільки погіршує виробництво, оскільки обсяги виробництва скорочуються. Відповідно, від'ємне значення будь-якого показника степеня у степеневій виробничій функції означає, що модельований процес характеризується крайнім проявом закону спадної ресурсвіддачі, коли виробництво є неефективним і для його покращення необхідно скорочувати обсяги застосовуваного ресурсу або використовувати інноваційні технології у виробництві.

Іншими словами, структура даних відображає процес.

Незважаючи на широке різноманіття моделей, як правило, в теоретичному і прикладному аналізі застосовуються функція Кобба-Дугласа, функція з постійною еластичністю заміщення ресурсів, функція Леонтьєва. Хоча для функції з постійною еластичністю заміщення ресурсів і функції Леонтьєва деякі з наведених вище вимог не виконуються. Крім того, при використанні функції з постійною еластичністю заміщення ресурсів інтерпретація величини економії, зумовленої масштабом виробництва, не завжди є точною; виникають труднощі при застосуванні моделі для n -факторів виробництва; параметри функції з постійною еластичністю заміщення ресурсів важко оцінити. Щодо функції Леонтьєва, то відсутність взаємозамінюваності між працею і капіталом в сучасних умовах здебільшого не відповідає дійсності, а тому клас подібних функцій описує далеко не всі виробничі процеси. Натомість виробнича функція Кобба-Дугласа відповідає всім перерахованим вище вимогам.

Аналіз виробничих функцій дозволяє не тільки встановити взаємозв'язок показників,

але й отримати характеристики, які є ключовими економічними поняттями – ефективність виробництва, темпи економічного розвитку, роль і вплив НТП, ціноутворення тощо [7; 8; 11; 12].

Перетворення параметрів рівняння за допомогою диференціювання та отримання на цій основі таких показників, як коефіцієнт еластичності, граничний продукт, гранична норма заміщення, у кожному з яких закладений певний економічний зміст, значно розширює можливості рівняння, підвищує прикладне значення побудованих моделей і тим самим робить цей метод ефективним.

Власне, рівняння виробничої функції математично описує тільки взаємозв'язок результативного показника і відібраних на основі якісного аналізу факторів. Аналітичні можливості закладені в основному в характеристиках, параметрах рівняння і особливо в деяких похідних показниках (табл. 1).

Середні значення результативного показника (y) і факторів (x_i) для формули граничної продуктивності доцільно розрахувати як середньо-геометричні, що відповідає середній арифметичній логарифмів цих чисел [7, с. 26].

Якщо знижується гранична норма заміщення одного із факторів, то це свідчить про те, що ефективність використання певного ресурсу обмежена. Дійсно, виробництво продукції зі зростанням певного змінного фактора буде зростати, однак обмеженням такого зростання є існуюча технологія. Збільшення використання одного із факторів за фіксованого значення решти факторів призведе до поступового зниження віддачі від його використання. У цьому полягає закон спадної граничної продуктивності. Водночас слід зазначити, що закон спадної граничної продуктивності має відносний, а не абсолютний характер, оскільки він діє лише у проміжках часу, коли один із факторів є незмінним, а технічний прогрес поступово розширює межі його використання.

Аналіз алокативної ефективності дозволяє виявити, чи є використання певного ресурсу

надлишковим, оптимальним чи недостатнім за існуючого рівня цін на ринку ресурсів і кінцевої продукції.

Висновки з цього дослідження. Проведене дослідження показало, що модель виробничої функції дозволяє перейти від технологічних залежностей до вартісних за допомогою похідних показників, отриманих на її основі, зокрема граничної продуктивності ресурсів. Цим самим нівелюється вплив зміни цін на результати функціонування підприємства. Також виробнича функція дозволяє розглядати і виявляти виробничі взаємозв'язки між різнорідними показниками (вартісними, натуральними, відносними

тощо). Відображаючи один з основних економічних процесів – процес виробництва продукції – виробнича функція дозволяє проводити аналітичні розрахунки, визначати ефективність використання ресурсів, доцільність їх додаткового залучення, прогнозувати обсяги виробництва.

Зв'язок між виробничою функцією та ефективністю функціонування підприємства проявляється у тому, що виробнича функція дозволяє встановити залежність між прибутковістю і технологією з урахуванням цін на ресурси і готову продукцію і технологічних пропорцій між застосовуваними ресурсами і максимальним обсягом випуску продукції.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Mansson J. How Can We Use The Result From A DEA Analysis? Identification of Firm–Relevant Reference Units / J.Mansson // *Journal of Applied Economics*. –2003 (May). –Vol. VI, No 1. – P. 157–175.
2. Mishra S. A Brief History of Production Functions / S. K. Mishra // *Working Paper Series. Social Science Research Network (SSRN)*. – MPRA, Paper No. 5254. – November 2007. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.webng.com/economics/A_Brief_History_of_Production_Functions.html.
3. Fonseca G. The Production Function / G. Fonseca // *Economist on–line*. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://cepa.newschool.edu>.
4. Гладышевский А.И. Формирование производственного потенциала: анализ и прогнозирование / А.И. Гладышевский. – М.: Наука, 1992. –152 с.
5. Фандель Г. Теорія виробництва і витрат / Г. Фандель ; пер. з нім. під керівництвом і наук. ред. М.Г. Грещака. – К.: Таксон, 2000. –520 с.
6. Halter A.N. A Note on the Transcendental Production Function / [A.N. Halter, H.O. Carter, J.G. Hocking] // *Journal of Farm Economics*. – 1957. – No. 29. – P. 966–974.
7. Грабовецький Б.Є. Виробничі функції: теорія, побудова, використання в управлінні виробництвом: [монографія] / Б.Є. Грабовецький. – Вінниця : УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2006. –138 с.
8. Плакунов М.К. Научно–технический прогресс в моделях экономического роста / М.К. Плакунов, Г.В. Шалабин // *Вестник Санкт–Петербургского университета*. – 2002. – Сер. 5., Вып. 2(№ 13), С. 100–111.
9. Куликова Н.В. Модификация производственной функции: теоретические подходы / Н. В. Куликова. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://www.anrb.ru/isei/cf2004/d814.doc>.
10. Малахова Н.Б. Применение производственной функции (PF) в оценке издержек инновационного товара / Н.Б. Малахова, А.П. Должикова. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.econ.msu.ru/cmt2/lib/a/1158/file/Malahova_36.pdf.
11. Костюк Л.В. Механизм эффективного планирования и прогнозирования предпринимательской деятельности с использованием модели производственных функций : автореф. дис. на соискание науч. степени канд. экон. наук : спец. 08.00.05 «Экономика и управление народным хозяйством (предпринимательство)» / Л.В. Костюк – СПб, 2007 – 24 с.
12. Humphrey T.M. Algebraic Production Functions and Their Uses Before Cobb–Douglas / T.M. Humphrey // *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*. –Winter 1997. –Vol. 83, № 1. – P. 51–83.
13. Производственные функции в управлении проектами / Под редакцией профессора И.Л. Туккеля // Научные и учебно–методические разработки Института инноватики. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.ii.spb.ru/2005/ins_inn_material/baza_2/production_functions_management_projects.pdf.
14. Производственные функции (ПФ) в управлении проектами. Под редакцией профессора И.Л. Туккеля // Научные и учебно–методические разработки Института инноватики. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.ii.spb.ru/material/methodical_m/m_4_2/2_4_12_Production%20functions.pdf.
15. Замков О.О. Математические методы в экономике : [ученик] / [О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных] ; под общ. ред. А.В. Сидоровича. –[4-е изд., стер.]. – М. : Дело и Сервис, 2004. – 365 с.
16. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – М.: Прогресс, 1975. – 606 с.
17. Хеди Э. Производственные функции в сельском хозяйстве / Э. Хеди, Д. Диллон. – М.: Прогресс, 1965. – 600 с.
18. Светульников С.Г. Сравнительный анализ производственных функций в моделях экономической динамики / С.Г. Светульников, И.С.Абдуллаев // *Известия Санкт–Петербургского университета экономики и финансов*. – 2010. – № 5. – С. 56–66.
19. Bhanumurthy K.V. Arguing a case for the Cobb–Douglas production function/ K.V. Bhanumurthy // *Review of Commerce Studies*. – 2002. – № 3.–P. 75–91.
20. Griliches Z. Production functions: the search for identification / Z. Griliches, J. Mairesse // *NBER Working Paper*. – 1995. – № 5067 (March). – P. 1–27.