УДК 330.43+336.764.2

Модель Блека–Шоулза з обмеженням

Янішевський В.С.
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри технологій управління
Національного університету «Львівська політехніка»

Розглянуті розв'язки стохастичного рівняння геометричного броунівського руху з граничними умовами. Граничні умови задаються у рівнянні Фоккера–Планка для густини умовної ймовірності, що відповідає даному стохастичному рівнянню. Встановлено, що граничній умові відповідають розв'язки для густини умовної ймовірності з нульовим потоком ймовірності на границі. Шляхом відповідної підстановки задача зведена до побудови розв'язків з граничною умовою Неймана, для чого використані відомі методи математичної фізики. Знайдено розв'язок моделі геометричного броунівського руху для ціни акції, де ціна акції обмежена зверху. За допомогою зазначеного обмеження моделюються так звані лінії спротиву, що спостерігаються у ринковій динаміці акцій. Знайдена формула для ціни європейського опціону типу кол, що узагальнює відому формулу Блека–Шоулза, проведено порівняння.

Ключові слова: стохастичні рівняння, броунівський рух, модель геометричного броунівського руху, рівняння Фоккера–Планка, модель Блека–Шоулза.

Янишевский В.С. МОДЕЛЬ БЛЭКА–ШОУЛЗА С ОГРАНИЧЕНИМ
Рассмотрены решения стохастического уравнения геометрического броуновского движения с граничными условиями. Граничные условия задаются в уравнении Фоккера–Планка для плотности условной вероятности, соответствующей данному стохастической уравнению. Установлено, что граничному условию соответствуют решения для плотности условной вероятности с нулевым потоком вероятности на границе. Путем соответствующей подстановки задача сведена к построению решений с граничным условием Неймана, для чего использованы известные методы математической физики. Найдено решение модели геометрического броуновского движения для цены акции, где цена акции ограничено сверху. С помощью указанного ограничения моделируются так называемые линии сопротивления, наблюдаемые в рыночной динамике акций. Найдена формула для цены европейского опциона типа кол, обобщает известную формулу Блэка–Шоулза, проведено сравнение.

Ключевые слова: стохастические уравнения, броуновское движение, модель геометрического броуновского движения, уравнение Фоккера–Планка, модель Блэка–Шоулза.

Yanishevsky V.S. BLACK–SCHOLES MODEL WITH CONSTRAINT
Solutions of stochastic equation of geometric Brownian motion model with boundary conditions were considered. The boundary conditions are set in Fokker–Planck equation for conditional probability density, which corresponds to the given stochastic equation. It was established that the solutions for equation for conditional probability density with zero probability flow on the boundary correspond to the given boundary condition. By means of substitution the problem was reduced to building solutions with Neumann boundary condition for which a well-known methods of mathematical physics were used. A solution for geometric Brownian motion model for shares price with a price constraint from above was found. With the help of mentioned constraint a so called resistance levels which are observed in markets dynamics are modeled. A European option call price formula which generalizes a known Black–Scholes formula was found. Also comparisons were carried out.

Keywords: stochastic equations, Brownian motion, geometric Brownian motion model, Fokker–Planck equation, Black–Scholes model.

Постановка проблеми. Стохастичні рівняння широко використовуються у моделюванні ціноутворення активів, цінних паперів, похідних фінансових інструментів та інших фінансових показників [1-3]. Як відомо, Башельє [1] першим застосував модель броунівського руху для опису динаміки ціни акції та вивів формулу для ціни опціону. Значно пізніше, в результаті статистичних досліджень ринку цінних паперів було з'ясовано, що модель геометричного броунівського руху більше відповідає поведінці цін активів та цінних паперів. На основі моделі геометричного броунівського руху Блек і Шоулз вивели формулу ціни європейського опціону кол [1-3]. З цього часу відбувався розвиток стохастичних моделей, розширювались напрямки їх застосування. Зокрема, двофакторні моделі стохастичної волатильності, де поряд з ціновою змінною враховувалась стохастична поведінка її волатильності. Стохастичні моделі застосовуються для вивчення динаміки процентних ставок облігацій, часової структури їх дохідності [1-3].

Попри те відзначають також певні недоліки в ряді стохастичних моделей. Зокрема, розв'язок у моделі Башельє допускає від'ємні ціни акції, що зрозуміло, не узгоджується з економічним змістом. Подібне має також місце для моделей Мертона і Васічека для процентних ставок. У цих випадках розв'язки моделей задані на всій числовій осі, проте їх слід розглядати лише для додатних значень змінної моделей. Тому актуальною є задача пошуку розв'язків за наявності обмежень на область визначення змінних моделі. Обмеження також можуть бути пов'язані із зовнішніми граничними умовами, що визначаються динамікою ринкових цін акцій та інших активів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Як ми вже зазначали Башельє був першим, хто застосував броунівський руху для опису хаотичної динаміки цін акцій та вивів формулу оцінки опціону. Проте значно пізніше для опису динаміки цін активів стали використовувати геометричний (економічний) броунівський рух. На його основі Блек і Шоулз отримали відому формулу визначення вартості опціонів [1; 2] для акцій.

Подальший розвиток стохастичних моделей динаміки цін активів відбувався шляхом розгляду стохастичної природи волатильності. У цих випадках модель описується двома стохастичними рівняннями: для ціни активу і волатильності активу. Наприклад, у відомій моделі Гестона [1; 4] волатильність описується стохастичним процесом Феллера, чи процесом Орнштейна-Уленбека [5]. Стохастичне моделювання використовується також для опису процентних ставок, часової структури дохідності облігацій [1; 6; 7]. Найбільш відомі серед них – моделі Мертона і Васічека, модель Кокса–Інгерсолла–Росса та ряд інших [1]. Модель Башельє для ціни облігації як і модель Мертона для процентної ставки ґрунтуються на звичайному броунівському русі, для них мають місце точні розв'язки задані для усіх дійсних значень змінної. Зрозуміло, що від'ємні значення як ціни акції, так і процентної ставки не мають економічного сенсу. Подібна проблема з коректним визначенням допустимої області випадкових змінних має також в моделі Васічека для процентної ставки, а також в ряді інших моделей.

Постановка задачі. Як ми вже зазначали, у ряді стохастичних фінансових моделей необхідно вводити обмеження на область визначення змінної, задавати додаткові зовнішні граничні умови для розв'язків стохастичних рівнянь. Граничні умови доволі складно застосовувати у випадку самих стохастичних рівнянь (1), які визначають динаміку змінних моделей. Більш гнучким є метод з використанням рівняння Фоккера–Планка для густини умовної ймовірності, що відповідає заданому стохастичному рівнянню. Як буде показано далі, граничній умові слід співставити розв'язки з нульовим потоком ймовірності [8; 9] на границі.

Граничні умови можуть бути пов'язані як із коректним описом області визначення змінних моделей, а також виступати засобом моделювання особливостей цінової динаміки спостережуваних статистичних ринкових даних.

Виклад основного матеріалу.

Граничні умови для стохастичних рівнянь

Розглянемо стохастичне рівняння динаміки ціни акції вигляду

$$dS = \tilde{\mu}(S)dt + \tilde{\sigma}(S)dW(t). \qquad (1)$$

Тут $\tilde{\mu}(S)$ – визначає дрейф ціни, $\tilde{\sigma}(S)$ – визначає її дисперсію (волатильність), які залежать від змінної моделі. Величина $dW(t)$, у рівнянні (1) задає стандартний вінерівський процес [1, 8], що визначаються характеристиками:

$$\langle dW(t)\rangle = 0,\ \langle dW(t)^2\rangle = dt. \quad (2)$$

Усереднення в (2) здійснюється за всіма можливими реалізаціями вінерівського процесу.

Як відомо [1, 8], стохастичному рівнянню (1) відповідає рівняння Фоккера – Планка для густини ймовірності $P(S,t)$

$$\frac{\partial P(S,t)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mu}(S)P(S,t)}{\partial S} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{\sigma}^2(S)P(S,t)}{\partial S^2} = 0. \quad (3)$$

Такому ж рівнянню (3) задовольняє також густина умовної ймовірності $\Pi(S,t,S_0)$, що пов'язує ймовірність $P(S_0)$ в початковий момент часу $t=0$ з густиною ймовірності в момент часу t

$$P(S,t) = \int_D \Pi(S,t,S_0)P(S_0)dS_0\ , \qquad (4)$$

Інтегрування у (4) здійснюється за всією областю визначення змінної S. Як відомо [8, 9], рівняння (3) можна записати також у вигляді рівняння збереження потоку ймовірності $J(S,t)$

$$\frac{\partial P(S,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(S,t)}{\partial S} = 0\,, \qquad (5)$$

де потік ймовірності $J(S,t)$ визначається виразом

$$J(S,t)=\tilde{\mu}(S)P(S,t)-\frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{\sigma}^2(S)P(S,t)}{\partial S}. \quad (6)$$

З умови нормування ймовірності $\int_D P(S,t)dS=1$ і рівняння (5) випливає, що потік ймовірності на границях області дорівнює нулю. Ця умова буде використана нами для пошуку розв'язків, що відповідають певним обмеженням області визначення змінної стохастичної моделі. Таким чином, для розв'язків моделі (1), які обмежені на границі G, виконується умова рівності нулю потоку $J(S_G,t)=0$ на цій границі.

Від граничної умови $J(S_G,t)=0$ зручно перейти до граничної умови Неймана. Зокрема, можна показати [8], що виконуючи у рівнянні $J(S,t)=0$ (6) заміну

$$P(S,t)=\exp(\phi(S))P_v(S,t),$$
$$\phi(S)=2\int\frac{\left(\tilde{\mu}(S)-\tilde{\sigma}(S)\tilde{\sigma}'(S)\right)}{\tilde{\sigma}(S)^2}dS, \quad (7)$$

розв'язки $P_v(S,t)$ на границі G задовольнятимуть умові Неймана $\partial_S P_v(S_G,t)=0$, а $P_v(S,t)$ відповідно є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial P_v(S,t)}{\partial t}-\tilde{\mu}(S)\frac{\partial P_v(S,t)}{\partial S}-\frac{\tilde{\sigma}^2(S)}{2}\frac{\partial^2 P_v(S,t)}{\partial S^2}=0. \quad (8)$$

Очевидно, має місце і обернене твердження, якщо розв'язки $P_v(S,t)$ рівняння (8) задовольняють умові Неймана на границі G, то розв'язки $P(S,t)$ рівняння (3) задовольнятимуть умові нульового потоку ймовірності. Для пошуку розв'язків $P_v(S,t)$ з граничною умовою Неймана використаємо методи розвинуті у задачах математичної фізики [10; 11].

Аналіз моделі Блека-Шоулза з обмеженням

Динаміка ціни акції у моделі геометричного броунівського руху визначається стохастичним рівнянням [1; 2]

$$dS=\mu S\,dt+\sigma S\,dW(t), \quad (9)$$

де μ, σ – сталі величини.

Для рівняння (9) відомий розв'язок [1] для S у експонентній формі

$$S=S_0\exp\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W(t)\right). \quad (10)$$

У формулі (10) береться до уваги, що $W(0)=0$, а також, згідно формули (2), випадкова змінна $W(t)$ описується нормальним розподілом з характеристиками: $\langle W(t)\rangle=0$, $\langle W(t)^2\rangle=t$. Очевидно, що для $S_0>0$, розв'язок (10) визначає додатні значення цінової змінної S, на відміну від моделі звичайного броунівського руху.

На основі (10) можна виразити зв'язок змінної $W(t)$ через S

$$W(t)=\frac{1}{\sigma}\left(\ln\left(\frac{S}{S_0}\right)-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right). \quad (11)$$

На основі (11) отримуємо формулу для густини умовної ймовірності

$$\Pi(S,t,S_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}\,S}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left(\ln(S/S_0)-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)^2\right). \quad (12)$$

Формула (12) визначає відомий логнормальний розподіл для випадкової величини $S>0$. Підстановкою легко перевірити, що густина умовної ймовірності (12) є розв'язком рівняння Фоккера – Планка (2) де:

$$\tilde{\mu}(S)=\mu S, \ \tilde{\sigma}(S)=\sigma S. \quad (13)$$

На основі формули (7) знайдемо також, що

$$\phi(S)=2\left(\frac{\mu}{\sigma^2}-1\right)\ln(S). \quad (14)$$

Відповідно на основі (7) і (14) отримаємо розв'язок $\Pi_v(S,t,S_0)$

$$\Pi_v(S,t,S_0)=\exp\left(-\phi(S)\right)\Pi(S,t,S_0)\exp\left(\phi(S_0)\right),$$

$$\Pi_v(S,t,S_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}\,S}\left(\frac{S}{S_0}\right)^{2\left(\frac{\mu}{\sigma^2}-1\right)}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left(\ln(S/S_0)-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)^2\right). \quad (15)$$

Як ми вже зазначали, якщо розв'язок $\Pi_v(S,t,S_0)$ задовольняє граничній умові Неймана в деякій точці граничній S_G, то відповідна йому густина умовної ймовірності $\Pi(S,t,S_0)$ (15) задовольнятиме умові нульового потоку ймовірності в граничній точці.

З використанням густини умовної ймовірності (12) знаходимо характеристики моделі геометричного броунівського руху: умовне середнє значення ціни $\langle S\rangle$, найбільш ймовірне значення P_P, медіану розподілу P_M:

$$\langle S\rangle=S_0 e^{\mu t},\ P_P=S_0\exp\left(\left(\mu-\frac{3}{2}\sigma^2\right)t\right),$$
$$P_M=S_0\exp\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right). \quad (16)$$

З порівняння характеристик (16) видно, що для малих значень σ ($\sigma<\sqrt{2/3\,\mu}$) вони мало відрізняються одна від одної, тому логнормальний розподіл (12) незначно відрізняється від розподілу нормально розподіленої величини. Із зростанням σ ситуація буде змінюватися, розподіл перестає бути симетричним і «витягується» у бік великих значень ціни S.

Стохастичне рівняння (9) визначає локальну зміну ціни активу в деякий момент часу, і зрозуміло, не може відображати глобальних змін ринкової динаміки активу. Зокрема, з технічного аналізу ринкової динаміки цін акцій [12; 13] відомо про так звані лінії спротиву та підтримки. В одному випадку ціна активу не зростає вище даного рівня, в іншому не зменшується нижче певного рівня. Значення ліній спротиву і підтримки можуть змінюватися з часом, що також є відображенням загальних процесів на ринку.

Розглянемо моделювання зазначених властивостей цін акцій використовуючи обмеження на діапазон зміни цін активу методом, що був наведений вище. Як ми вже зазначали густина умовної ймовірності (12) в моделі (7) задана на множині $S > 0$. Обмежимо зміну ціни активу у діапазоні $0 < S < S_U$ і знайдемо відповідні розв'язки рівняння Фоккера – Планка. Спочатку на основі $\Pi_v(S,t,S_0)$ (13) побудуємо розв'язок $\Pi_v^N(S_U,t,S_0)$, що задовольняє умові Неймана для $S = S_U$ ($\partial_S \Pi_v^N(S_U,t,S_0) = 0$).

Для побудови вказаного розв'язку знайдемо перетворення Лапласа для $\Pi_v(S,t,S_0)$

$$K_v(S,s,S_0) = \int_0^{\infty} \Pi_v(S,t,S_0) e^{-st} dt . \qquad (17)$$

Беручи до уваги формулу (15) після інтегруванням у (17) знайдемо

$$K_v(S,s,S_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{SS_0}\sqrt{2s+s_0^2}} \left(\dfrac{S}{S_0}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sigma}\left(\sqrt{2s+s_0^2}-s_0\right)}, & S < S_0; \\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{SS_0}\sqrt{2s+s_0^2}} \left(\dfrac{S}{S_0}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sigma}\left(\sqrt{2s+s_0^2}+s_0\right)}, & S > S_0 . \end{cases} \qquad (18)$$

Тоді на основі $K_v(S,s,S_0)$ побудуємо зображення Лапласа, що задовольняє умові Неймана у точці S_U. Як ми вже вказували, спосіб побудови таких розв'язків наведений у [10; 11] для функцій Гріна рівняння Шредінгера. Оскільки зображення Лапласа (17) для густини ймовірності співпадає з функцією Гріна для уявного часу [9; 14] це дозволяє використати відомі розв'язки. В результаті отримаємо:

$$K_v^N(S,s,S_0) = K_v(S,s,S_0) - \Delta K_v(S,s,S_0) ,$$

$$\Delta K_v(S,s,S_0) = \frac{\partial K_{v,S_0}(S,s,S_U)\,\partial K_{v,S}(S_U,s,S_0)}{\partial^2 K_{v,S_0,S}(S_U,s,S_U)} . \qquad (19)$$

Як видно з формули (19), введення умови Неймана для розв'язку $K_v(S,s,S_0)$ приводить до відніманню складової $\Delta K_v(S,s,S_0)$. Вираз для $\Delta K_v(S,s,S_0)$ у (19) будується на основі похідних від $K_v(S,s,S_0)$ за змінними S, S_0. Прямим обчисленням можна переконатись у виконанні умови Неймана $\partial_S K_v^N(S_U,s,S_0) = 0$.

Зазначимо, що подібний метод введення обмежень для стохастичного рівняння використовувався у [15], де замість умови нульового потоку на границі обмеження використовувалась умова Діріхле та відповідний розв'язок для функції Гріна [10; 11].

Підставляючи зображення (18) у формулу (19), знайдемо

$$\Delta K_v(S,s,S_0) = -\frac{\sqrt{2s+s_0^2}+s_0}{\left(\sqrt{2s+s_0^2}-s_0\right)\sqrt{2s+s_0^2}} \times$$
$$\times \frac{1}{\sigma S_0}\left(\frac{S}{S_0}\right)^{-\frac{s_0}{\sigma}} \left(\frac{S_U^2}{SS_0}\right)^{-\frac{\sqrt{2s+s_0^2}}{\sigma}} , \qquad (20)$$

де введено позначення $s_0 = \mu/\sigma - \sigma/2$.

Наступним кроком на основі зв'язку наведеного у формулі (13) знайдемо зображення Лапласа густини умовної ймовірності, що задовольняє умову рівності нулю потоку ймовірності

$$K^J(S,s,S_0) = \exp\left(\phi(S)\right) K_v^N(S,s,S_0) \exp\left(-\phi(S_0)\right)$$

$$K^J(S,s,S_0) = K(S,s,S_0) - \Delta K(S,s,S_0) , \qquad (21)$$

де позначено:

$$K(S,s,S_0) = \exp\left(\phi(S)\right) K_v(S,s,S_0) \exp\left(-\phi(S_0)\right), \qquad (22)$$

$$\Delta K(S,s,S_0) = -\frac{\sqrt{2s+s_0^2}+s_0}{\left(\sqrt{2s+s_0^2}-s_0\right)\sqrt{2s+s_0^2}} \times$$
$$\times \frac{1}{\sigma S}\left(\frac{S}{S_0}\right)^{\frac{s_0}{\sigma}} \left(\frac{S_U^2}{SS_0}\right)^{-\frac{\sqrt{2s+s_0^2}}{\sigma}} . \qquad (23)$$

Очевидно, що $K(S,s,S_0)$ – зображення Лапласа умовної густини ймовірності (12), а $\Delta K(S,s,S_0)$ – доданок зумовлений граничною умовою. Виконуючи обернене перетворення Лапласа [16] для (23), отримаємо вираз

$$\Delta\Pi(S,t,S_0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}\,S}\left(\frac{S}{S_0}\right)^{\frac{\mu}{\sigma^2}-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 t\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left[\ln\left(\frac{S_U^2}{SS_0}\right)\right]^2\right) - \frac{2}{S\sigma^2}\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{S_U}{S}\right)^{-\frac{2\mu}{\sigma^2}+1} \times \qquad (24)$$
$$\times \square\square\left(\frac{1}{\sqrt{t}\sigma}\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t - \ln\left(\frac{S_U^2}{SS_0}\right)\right]\right)\square$$

Тут означено інтегральну функцію нормального розподілу

$$\mathrm{N}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx . \qquad (25)$$

В результаті знайдемо густину умовної ймовірності моделі геометричного броунівського руху на інтервалі $0 < S < S_U$

$$\Pi^J(S,t,S_0) = \Pi(S,t,S_0) - \Delta\Pi(S,t,S_0) , \qquad (26)$$

де $\Pi(S,t,S_0)$ наведена у формулі (12), а $\Delta\Pi(S,t,S_0)$ у (24).

Знайдений розв'язок задовольняє умові нульового потоку ймовірності на границі $S = S_U$, а також виконується умова нормування $\int_0^{S_U} \Pi^J(S,t,S_0)dS = 1$. На основі густини умовної ймовірності (26) можна визначити характеристики геометричного броунівського руху з обмеженням ціни зверху. Знайдемо, зокрема, ціну європейського опціону кол.

Як відомо [1], ціна опціону дорівнює дисконтованому за безризиковою ставкою r (у формулі (26) також слід здійснити заміну $\mu \to r$) середньому значенню платіжної функції

$$C^J(T) = \exp(-rT)\int_0^{\infty} \Pi^J(S,T,S_0)(S-K)^+ dS\,. \quad (27)$$

Тут позначена платіжна функція

$$(S-K)^+ = \begin{cases} (S-K), & S > K; \\ 0, & S < K, \end{cases} \quad (28)$$

де K – страйк ціна, T – термін до виконання опціону.

Підставляючи отриману густину ймовірності (26) у формулу (27) після виконання необхідних обчислень отримаємо ціну європейського опціону кол у моделі з обмеженням:

$$C_{BS}^J(T) = C_{BS}(T) + \Delta C_{BS}(T)\,,$$

$$C_{BS}(T) = S_0 \mathrm{N}\left(d_+\right) - e^{-rT} K \mathrm{N}\left(d_-\right)\,,$$

$$\begin{gathered} \Delta C_{BS}(T) = -S_0 \mathrm{N}(d_1) + \frac{S_U}{r} e^{-rT}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{N}(d_2) + \\ + \frac{\sigma^2 S_U}{2r}\left(e^{-rT}\left(\frac{S_U}{K}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \mathrm{N}(d_3) + 2\left(\frac{S_U}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}}\left(\mathrm{N}(d_5) - \mathrm{N}(d_4)\right)\right), \end{gathered} \quad (29)$$

де введено наступні позначення:

$$d_{\pm} = \frac{\ln\left(S_0/K\right)}{\sqrt{T}\sigma} + \frac{\left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma}\sqrt{T}\,;\; d_1 = d_+ - \frac{\ln\left(S_U/K\right)}{\sqrt{T}\sigma}\,;$$

$$d_2 = d_- - \frac{\ln\left(S_U/K\right)}{\sqrt{T}\sigma}\,;\; d_3 = d_- - \frac{2\ln\left(S_U/K\right)}{\sqrt{T}\sigma}\,;$$

$$d_4 = d_+ + \frac{\ln\left(S_U K/S_0^2\right)}{\sqrt{T}\sigma}\,;\; d_5 = d_+ + \frac{2\ln\left(S_U/S_0\right)}{\sqrt{T}\sigma}\,.$$

Складова $C_{BS}(T)$ у формулі (29) відповідає відомій формулі Блека – Шоулза для ціни європейського опціону кол [1], доданок $\Delta C_{BS}(T)$ зумовлений обмеженням в моделі геометричного броунівського руху на ціну акції $0 < S < S_U$. Очевидно, для $S_U \to \infty$, складова $\Delta C_{BS}(T) \to 0$.

Подібним чином можна моделювати лінії підтримки у ринковій динаміці цін акцій додаючи обмеження знизу для змінної моделі. Введення додаткових граничних умов у моделюванні динаміки цінових активів впливатиме на оцінку похідних фінансових інструментів, ціноутворення опціонів зокрема. Чисельне дослідження величини внеску пов'язаного з обмеженням з використанням статистичних даних буде предметом окремої роботи.

Висновки. В даній роботі розглянуто спосіб побудови розв'язків стохастичних фінансових моделей за наявності зовнішніх граничних умов. Зовнішні граничні умови пов'язані, як правило, з обмеженням допустимої області визначення змінної моделі так і можуть диктуватися ціновою динамікою активів на фінансових ринках. Для правильного визначення зазначених розв'язків використовується рівняння Фоккера – Планка для густини умовної ймовірності. Розв'язки, що відповідають заданим граничним умовам, повинні задовольняти нульовому потоку ймовірності на границях. Шляхом відповідної заміни розв'язок цієї задачі зведено до пошуку розв'язків з умовами Неймана на границях. Для останньої використано відомі методи розвинуті у математичній фізиці для побудови функцій Гріна рівняння Шредінгера, що задовольняють умовам Неймана. В результаті це дає змогу розробити ефективний алгоритм для побудови розв'язків стохастичних рівнянь для заданих граничних умов.

Запропонований спосіб застосований до моделі геометричного броунівського руху цінової динаміки акцій, для якої отриманий розв'язок заданий для значень цінової змінної $0 < S < S_U$. Для цього випадку отримано формулу ціни європейського опціону кол, що узагальнює формулу Блека – Шоулза. Отримані розв'язки можуть бути використані для моделювання ліній спротиву, що спостерігаються у ціновій динаміці акцій на фінансовому ринку. Більш детальний аналіз отриманих формул із використанням статистичних даних буде предметом наступних досліджень.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики : В 2 т. Т. 1 : Факты, модели. М.: МЦНМО, 2016. 440 с.
2. A. L. Lewis. Option Valuation under Stochastic Volatility / A. L. Lewis. – Finance Press, 2000. – 351 p.
3. John C. Hull. Options, futures, and other derivatives / John C. Hull. – New York: Pearson Education, 2018. – 868 p.
4. Mark Joshi. More mathematical finance / Mark Joshi. – Melbourne: Pilot Whale Press, 2011. – 484 p.
5. Sergii Kuchuk-Iatsenko. Option pricing in the model with stochastic volatility driven by Ornstein–Uhlenbeck process. Simulation / Sergii Kuchuk-Iatsenko, Yuliya Mishura // Modern Stochastics: Theory and Applications. – 2015. – no. 2. – P. 355-369.
6. Люу Ю-Д. Методы и алгоритмы финансовой математики / Ю-Д. Люу. [Пер. с англ.] – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 751 с.
7. P. Wilmott. Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering / P. Wilmott. – John Wiley & Sons, Chichester, 1998. – 739 p.
8. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках / Гардинер К. В. [Пер. с англ.] – М.: Мир, 1986. – 526 с.
9. H. Risken. The Fokker-Planck Equation – Methods of Solution and Applications / H. Risken [second edition] – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 472 p.
10. Grosche C. δ-function perturbations and boundary problems by path integration. Annalen der Physik, 1993, vol.2(6), p. 557-589.
11. C. Grosche and F. Steiner: Table of Feynman Path Integrals; to appear in Springer Tracts in Modern Physics, 1998. – 449 p.
12. Paul Wilmott. Introduces Quantitative Finance / Paul Wilmott. – John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2007. – 697 p.
13. Мерфи Джон Дж. Технический анализ финансовых рынков: полный справочник по методам и практике трейдинга / Мерфи Джон Дж. [Пер. с англ.] – М.: Издательство: Вильямс, 2016. – 496 с.
14. H. Kleinert. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics and financial markets / H. Kleinert. – Third edition. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, 2004. – 1932 p.
15. Marc Decaps, Ann De Scheppe, Marc Goovaerts. Applications of delta-function perturbation to the pricing of derivative securities. Physica A, Elsevier, 2004, 342, pp.677-692.
16. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., Marichev O.I. Integrals and Series, Volume 5: Inverse Laplace Transforms / Prudnikov A.P. – New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1992. – 619 p.

REFERENCES:

1. Shiryaev A. N. (2016) Osnovy stokhasticheskoy finansovoy matematiki: V 2 t. T. 1: Fakty, modeli [Essentials of Stochastic Finance: In 2 V. V. 1: Facts, Models]. Moscow: MCCME. (in Russian)
2. A. L. Lewis. Option Valuation under Stochastic Volatility / A. L. Lewis. – Finance Press, 2000. – 351 p.
3. John C. Hull. Options, futures, and other derivatives / John C. Hull. – New York: Pearson Education, 2018. – 868 p.
4. Mark Joshi. More mathematical finance / Mark Joshi. – Melbourne: Pilot Whale Press, 2011. – 484 p.
5. Sergii Kuchuk-Iatsenko. Option pricing in the model with stochastic volatility driven by Ornstein–Uhlenbeck process. Simulation / Sergii Kuchuk-Iatsenko, Yuliya Mishura // Modern Stochastics: Theory and Applications. – 2015. – no. 2. – P. 355-369.
6. Lyuu Yu-D. (2007) Metody i algoritmy finansovoy matematiki [Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, and Algorithms]. Moscow: BINOM. Knowledge Laboratory. (in Russian)
7. P. Wilmott. Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering / P. Wilmott. – John Wiley & Sons, Chichester, 1998. – 739 p.
8. Gardiner K. V. (1986) Stokhasticheskie metody v estestvennykh naukakh [Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences]. Moscow: Mir. (in Russian)
9. H. Risken. The Fokker-Planck Equation – Methods of Solution and Applications / H. Risken [second edition] – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 472 p.
10. Grosche C. δ-function perturbations and boundary problems by path integration. Annalen der Physik, 1993, vol.2(6), p.557-589.
11. C. Grosche and F. Steiner: Table of Feynman Path Integrals; to appear in Springer Tracts in Modern Physics, 1998. – 449 p.

12. Paul Wilmott. Introduces Quantitative Finance / Paul Wilmott. – John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2007. – 697 p.

13. Merfi Dzhon Dzh. (2016) Tekhnicheskiy analiz finansovykh rynkov: polnyy spravochnik po metodam i praktike treydinga / Merfi Dzhon Dzh. [Per. s angl.] – M.: Izdatel'stvo: Vil'yams. (in Russian)

14. H. Kleinert. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics and financial markets / H. Kleinert. – Third edition. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, 2004. – 1932 p.

15. Marc Decaps, Ann De Scheppe, Marc Goovaerts. Applications of delta-function perturbation to the pricing of derivative securities. Physica A, Elsevier, 2004, 342, pp.677-692.

16. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., Marichev O.I. Integrals and Series, Volume 5: Inverse Laplace Transforms / Prudnikov A.P. – New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1992. – 619 p.