УДК 330.43+336.764.2

Стохастичні методи у фінансовому моделюванні

Янішевський В.С.
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри технологій управління
Національного університету «Львівська політехніка»

Запропоновано стохастичний метод правильного визначення області змінних в деяких фінансових моделях. В основі методу лежить опис стохастичних моделей на основі рівняння Фоккера-Планка для умовної ймовірності. Запропонована побудова розв'язків, для яких на границі між допустимими і недопустимими значеннями змінних фінансових моделей потік умовної ймовірності рівний нулю. Шляхом перетворень задача зведена до побудови розв'язків з граничною умовою Неймана, для чого використані відомі методи математичної фізики. Зазначений алгоритм продемонстрований на прикладі моделі Васічека для процентної ставки, для якої визначена умовна ймовірність (її зображення Лапласа за часовою змінною) лише в області допустимих значень змінних.
Ключові слова: стохастичні рівняння, броунівський рух, модель Васічека.

Янишевский В.С. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ФИНАНСОВОМ МОДЕЛИРОВАНИИ
Предложен стохастический метод правильного определения области переменных в некоторых финансовых моделях. В основе метода лежит описание стохастических моделей на основе уравнения Фоккера-Планка для условной вероятности. Предложено построение решений, для которых на границе между допустимыми и недопустимыми значениями переменных финансовых моделей поток условной вероятности равен нулю. Путем преобразований задача сведена к построению решений с граничным условием Неймана, для чего использованы известные методы математической физики. Указанный алгоритм продемонстрирован на примере модели Васичека для процентной ставки, для которой определена условная вероятность (ее изображение Лапласа по временной переменной) только в области допустимых значений переменных.
Ключевые слова: стохастические уравнения, броуновское движение, модель Васичека.

Yanishevsky V.S. STOCHASTIC METHODS IN MODELING OF FINANCIAL PROCESSES
A stochastic method of correct determination of domain of variables for some financial models is proposed. The method is based on describing of stochastic models based on Fokker–Plank equation for conditional probability. The approach of building solutions for which the probability flow on the bound of allowed and not allowed values of financial models variables is equal to zero is proposed. By means of transforms the problem is reduced to a problem of building solutions with the Neumann boundary conditions, for which the well-known methods of mathematical physics are used. The stated algorithm is applied on the example of Vasicek model of interest rates for which the conditional probability (its Laplace transform with respect to a time variable) is defined only in domain of allowable variable values.
Keywords: stochastic equations, Brownian motion, Vasicek model.

Постановка проблеми. Методи стохастичного аналізу займають важливе місце в моделюванні ціноутворення різноманітних фінансових інструментів. Стохастична модель для опису фінансових активів і оцінки вартості опціонів, що ґрунтувалась на броунівському русі, вперше була побудована Башельє [1-3]. Попри простоту моделі їй присутній суттєвий недолік – ціна активу може набувати від'ємних значень, що не відповідає економічному змісту. Наступний важливий крок був здійснений Самуельсоном [2; 3], який запропонував для опису ціни акцій використовувати модель геометричного (економічного) броунівського руху, в якій усувався цей недолік. На основі моделі геометричного броунівського руху Блек і Шоулз вивели знамениту формулу для оцінювання опціонів [2; 3].

Проблема коректного опису стохастичних змінних, що відповідають певним фінансовим показникам, притаманна ряді інших моделей. Одному із шляхів вирішення цієї проблеми присвячена дана стаття.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. З того часу як Блек і Шоулз вивели знамениту формулу для оцінювання опціонів [2; 3] відбувся бурхливий розвиток стохастичний моделей для опису базових активів та похідних фінансових інструментів. Серед найбільш відомих – це модель Гестона [1; 3; 4], яка враховує також стохастичний процес для волатильності ціни базового активу. Стохастичні моделі були запропоновані для опису процентних ставок, побудови часової структури дохідності облігацій [1; 3; 4]. Найбільш відомі серед них – моделі Мертона, Васічека, модель Кокса–Інгерсолла–Росса та інші. Найбільш привабливими через їх простоту виділяють моделі Мертона і Васічека. Зокрема модель Мертона як і модель Башельє – це моделі простого броунівського руху з дрейфом. Модель Васічека побудована за аналогією з відомою моделлю Орнштейна – Уленбека з фізики броунівських частинок [1; 5; 6]. Характерною рисою моделі Васічека, як і моделі Орнштейна – Уленбека є те, що вона описує наближення процентної ставки до заданого сталого рівня.

Постановка задачі. Як ми вже зазначали, одним із недоліків деяких стохастичних фінансових моделей є те, що випадкова змінна, яку вони описують, набуває від’ємних значень, що не відповідають економічному змісту задачі. Тому в зазначених моделях виникає потреба вводити певні обмеження для зміни випадкової змінної. Досягнути цього не завжди вдається в рамках самої моделі, а потрібно розглядати зовнішні граничні умови для стохастичних рівнянь. Граничні умови зручно застосовувати не у випадку самих стохастичних рівнянь виду (1), а з використанням еквівалентного опису стохастичних процесів за допомогою рівняння Фоккера – Планка для умовних ймовірностей. Зокрема, найбільш природнім є використання граничних умов відбивання [1; 7]. Оскільки у точках відбивання потік ймовірності дорівнює нулю і тому випадкова величина набуватиме значень лише в необхідній області. В даній роботі на прикладі моделі Васічека для процентної ставки ми продемонструємо спосіб побудови умовної ймовірності стохастичної моделі, де змінна величина набуває лише додатних значень, що узгоджується з економічним змістом процентної ставки.

Виклад основного матеріалу. Стохастична динаміка процентної ставки r у моделі Васічека задається рівнянням [1; 3]:

$$dr = \beta(\mu - r)dt + \sigma\, dW(t)\,. \qquad (1)$$

Тут μ, β, σ – сталі величини. За своїм змістом параметр β визначає швидкість прямування середнього значення процентної ставки до μ, σ – визначає дисперсію (волатильність) стохастичного процесу. Величина $dW(t)$, у рівнянні (1) задає стандартний вінерівський процес, який визначаються характеристиками:

$$\langle dW(t)\rangle = 0,\ \langle dW(t)^2\rangle = dt.$$

Можна показати, що стохастичному рівнянню (1) задовольняє наступний розв’язок [1; 6; 7]

$$r(t) = \mu + (r_0 - \mu)e^{-\beta(t-t_0)} + \sigma\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-\tau)}dW(\tau)\,. \qquad (2)$$

На основі розв’язку (2) знаходимо, що змінна величина $r(t)$ нормально розподілена з параметрами:

$$\langle r(t)\rangle = e^{-\beta(t-t_0)}(r_0 - \mu) - \mu\,;$$

$$\sigma(t) = \sqrt{\langle r(t)^2\rangle - \langle r(t)\rangle^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\beta}}\sqrt{1 - e^{-2\beta(t-t_0)}}\,. \qquad (3)$$

В результаті умовну густину ймовірності розподілу випадкової величини r можна записати у вигляді

$$P(r,t,r_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(r - \langle r(t)\rangle)^2}{\sigma(t)^2}\right). \qquad (4)$$

Звідси можна визначити ймовірність того, що випадкова величина в момент часу t набуває від’ємних значень

$$P_{r<0}(t) = \int_{-\infty}^{0} P(r,t,r_0,t_0)\,dr = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\langle r(t)\rangle}{\sqrt{2}\sigma(t)}\right)\right).$$

Із зростання часу зазначена ймовірність прямує до

$$P_{r<0}(t >> 1) \to \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\beta}\mu}{\sigma}\right)\right).$$

Для значень $\frac{\sqrt{\beta}\mu}{\sigma} << 1$ ймовірність $P_{r<0}(t >> 1) \to \frac{1}{2}$. Таким чином параметр $\frac{\sqrt{\beta}\mu}{\sigma}$ розділяє область параметрів, де випадкова величина r із значною ймовірністю перебуває у від’ємній області і де такими процесами можна знехтувати.

Умовна ймовірність в моделі Васічека на осі ($r \in R$)

Умовна ймовірність переходу $P(r,t,r_0,t_0)$, що наведена у формулі (4), визначає ймовірність переходу з точки (r_0,t_0) в точку (r,t) і задовольняє рівняння Фоккера-Планка [1, 7].

$$\frac{\partial P(r,t)}{\partial t} + \beta(\mu - r)\frac{\partial P(r,t)}{\partial r} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial r^2} - \beta P(r,t) = 0. \qquad (5)$$

Для спрощення запису координати точки (r_0,t_0) у рівнянні (5) не вказані. Оскільки нам потрібні будуть певні розв’язки пов’язані з рівнянням (5), виконаємо ряд перетворень рівняння. Зокрема рівняння для умовної ймовірності має стаціонарний розв’язок (отримується у рівнянні (5) якщо покласти $\partial P(r,t)/\partial t = 0$))

$$P_s(r,t) = C\exp\left(-\frac{\beta r(r - 2\mu)}{\sigma^2}\right). \qquad (6)$$

Тут стала C визначається з умови нормування і розв'язок заданий на всій осі $r \in R$. Наступним кроком у рівнянні (5) виконаємо заміну

$$P(r,t) = \exp\left(-\frac{\beta\, r(r-2\mu)}{\sigma^2}\right) P_1(r,t), \qquad (7)$$

де функція $P_1(r,t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial P_1(r,t)}{\partial t} + \beta(\mu - r)\frac{\partial P_1(r,t)}{\partial r} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P_1(r,t)}{\partial r^2} = 0. \quad (8)$$

Усунемо також доданок з першою похідною за r у рівнянні (8) і перейдемо до еквівалентного рівняння у канонічній формі. Зазначених перетворень досягаємо такою заміною:

$$P_1(r,t) = F(r,t) P_2(r,t);$$

$$F(r,t) = \exp\left(\frac{\beta\, r(r-2\mu)}{2\sigma^2} - \frac{\beta^2\mu^2}{2\sigma^2} t + \frac{\beta}{2} t\right). \quad (9)$$

Відповідно функція $P_2(r,t)$ задовольняє наступне рівняння

$$\frac{\partial P_2(r,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P_2(r,t)}{\partial r^2} + \frac{\beta^2 r(\mu - 2r)}{2\sigma^2} P_2(r,t) = 0. \quad (10)$$

Отримане рівняння (9) добре вивчене у математичній фізиці і описує осцилятор з лінійним доданком [5, 8]. Відомий розв'язок $P_2(r,t,r_0,t_0)$ задачі Коші для цього рівняння з початковою умовою $P_2(r,t,r_0,t_0) \xrightarrow[t \to t_0]{} \delta(r - r_0)$. Функція $P_2(r,t,r_0,t_0)$ є також функцією Гріна рівняння (10) і визначається наступним виразом

$$P_2(r,t,r_0,t_0) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi\sigma^2 \sinh(\beta(t-t_0))}} \exp\left(\frac{\beta^2\mu^2(t-t_0)}{2\sigma^2}\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2 \sinh\left(\beta(t-t_0)\right)}\left[\left((r-\mu)^2 + (r_0-\mu)^2\right) \times \right.\right. \quad (11)$$
$$\left.\left. \times \cosh\left(\beta(t-t_0)\right) - 2(r-\mu)(r_0-\mu)\right]\right)$$

Наведений розв'язок заданий на усій осі $r, r_0 \in R$ і задовольняє граничним умовам на нескінченості

$$G_2(r,t,\pm\infty,t_0) = G_2(\pm\infty,t,r_0,t_0) = 0.$$

На основі $P_2(r,t,r_0,t_0)$ отримаємо функцію Гріна функцію $P_1(r,t,r_0,t_0)$ для рівняння (8)

$$P_1(r,t,r_0,t_0) = F(r,t) P_2(r,t,r_0,t_0) F^{-1}(r_0,t_0),$$

$$P_1(r,t,r_0,t_0) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi\sigma^2 \sinh(\beta(t-t_0))}} \exp\left(\frac{\beta(t-t_0)}{2}\right)$$
$$\times \exp\left(\frac{\beta\, r(r-2\mu)}{2\sigma^2} - \frac{\beta\, r_0(r_0-2\mu)}{2\sigma^2}\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2 \sinh\left(\beta(t-t_0)\right)}\left[\left((r-\mu)^2 + (r_0-\mu)^2\right) \times \right.\right. \quad ,(12)$$
$$\left.\left. \times \cosh\left(\beta(t-t_0)\right) - 2(r-\mu)(r_0-\mu)\right]\right)$$

а також отримуємо зв'язок з умовною ймовірністю $P(r,t,r_0,t_0)$ (також функцією Гріна рівняння (5))

$$P(r,t,r_0,t_0) = \exp\left(-\frac{\beta\, r(r-2\mu)}{\sigma^2}\right) \times$$
$$\times P_1(r,t,r_0,t_0) \exp\left(\frac{\beta\, r_0(r_0-2\mu)}{\sigma^2}\right). \quad (13)$$

Простою підстановкою (12) у (13) отримаємо

$$P(r,t,r_0,t_0) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi\sigma^2 \sinh(\beta(t-t_0))}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2}\left((r-\mu)^2 - (r_0-\mu)^2\right)\right) \exp\left(\frac{1}{2}\beta(t-t_0)\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\beta}{2\sigma^2 \sinh\left(\beta(t-t_0)\right)}\left[\left((r-\mu)^2 + (r_0-\mu)^2\right) \times \right.\right. \quad . (14)$$
$$\left.\left. \times \cosh\left(\beta(t-t_0)\right) - 2(r-\mu)(r_0-\mu)\right]\right)$$

Неважко переконатись, що параметри знайдені за допомогою перехідної ймовірності $P(r,t,r_0,t_0)$ (14) співпадають з такими наведеними у формулі (3), і умовні ймовірності задані формулами (4) і (14) співпадають.

$$\left\langle r(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(r,t,r_0,t_0)\, r\, dr;$$

$$\left\langle r(t) \right\rangle = e^{-\beta(t-t_0)}(r_0 - \mu) - \mu;$$

$$\left\langle r(t)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(r,t,r_0,t_0)\, r^2\, dr;$$

$$\sigma(t) = \sqrt{\left\langle r(t)^2 \right\rangle - \left\langle r(t) \right\rangle^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\beta}} \sqrt{1 - e^{-2\beta(t-t_0)}}.$$

Аналіз моделі Васічека на півосі ($r \geq 0$)

Для пошуку розв'язків рівняння для умовної ймовірності $P(r,t)$, де випадкова величина змінюється лише в області додатних значень $r \geq 0$, будемо вважати точку $r = 0$ межею відбивання. Тоді, як відомо [7], потік ймовірності $J(r)$

$$J(r) = \beta(\mu - r) P(r,t) - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} \qquad (15)$$

на цій межі повинен дорівнювати нулю $J(0) = 0$. Таким чином, будемо шукати розв'язок рівняння для умовної ймовірності (5) за наявності граничної умови рівності нулю потоку ймовірності (15). Прямою підстановкою формули (7) у вираз для потоку (15) можна показати, що розв'язок $P_1(r,t)$ рівняння (8) задовольнятиме умові Неймана

$$\left.\frac{\partial P_1(r,t)}{\partial r}\right|_{r=0} = 0. \qquad (16)$$

Тому зручніше побудувати розв'язок $P_1(r,t)$, що задовольняє умові Неймана, а потім на його основі отримати розв'язок $P(r,t)$, що задовольняє нульовому потоку ймовірності. Для побудови $P_1(r,t)$ ми скористаємось розробленими методами математичної фізики [9, 10, 11], які дозволяють на основі розв'язків, що задані на всій осі (для одновимірної задачі), будувати розв'язки при додаванні граничних умов Неймана. Для безпосереднього застосування зазначених методів слід знайти перетворення Лапласа за часовою змінною від $P_1(r,t,r_0,t_0)$.

$$K_1(r,s,r_0) = \int_0^{\infty} P_1(r,t,r_0,t_0) e^{-s(t-t_0)} dt .$$

Зображення Лапласа $K_1(r,s,r_0)$ знайдемо використовуючи відоме співвідношення для функції Гріна зміщеного осцилятора у математичній фізиці [8, 10]. Відмінність полягає у наявності додаткового множника $\exp\left(\dfrac{\beta(t-t_0)}{2}\right)$ у (14), тому для зображення Лапласа $K_1(r,s,r_0)$ додатково виконаємо зсув за змінною s ($s \to s + \beta/2$). В результаті для зображення Лапласа $K_1(r,s,r_0)$ отримаємо вираз

$$K_1(r,s,r_0) = \exp\left(\frac{\beta}{2\sigma^2}(r-r_0)(r+r_0-2\mu)\right) \times$$
$$\times \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi\beta\sigma}}\Gamma\left(\dfrac{s}{\beta}\right) D_{-\frac{s}{\beta}}\left(\dfrac{\sqrt{2\beta}}{\sigma}(r-\mu)\right) D_{-\frac{s}{\beta}}\left(\dfrac{\sqrt{2\beta}}{\sigma}(\mu-r_0)\right), \ r > r_0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi\beta\sigma}}\Gamma\left(\dfrac{s}{\beta}\right) D_{-\frac{s}{\beta}}\left(\dfrac{\sqrt{2\beta}}{\sigma}(\mu-r)\right) D_{-\frac{s}{\beta}}\left(\dfrac{\sqrt{2\beta}}{\sigma}(r_0-\mu)\right), \ r < r_0 \end{cases} ; \quad (17)$$

Тут $\Gamma(x), D_\nu(x)$ – гамма функція і функція параболічного циліндра відповідно [12].

На основі знайденого зображення побудуємо функцію $K_1^N(r,s,r_0)$, що задовольняє граничній умові Неймана у точках $r, r_0 = 0$. Загальний спосіб побудови функції Гріна, що задовольняє умові Неймана, розглянутий у [9, 10]. Шукана функція $K_1^N(r,s,r_0)$ буде сумою вихідної $K_1(r,s,r_0)$ та складової побудованої за певним правилом на основі $K_1(r,s,r_0)$. В результаті для $K_1^N(r,s,r_0)$ запишемо:

$$K_1^N(r,s,r_0) = K_1(r,s,r_0) - \Delta K_1(r,s,r_0), \quad (18)$$

$$\Delta K_1(r,s,r_0) = \frac{\partial K_{1,r_0}(r,s,0)\,\partial K_{1,r}(0,s,r_0)}{\partial^2 K_{1,r_0,r}(0,s,0)} . \quad (19)$$

У формулі (19) у чисельнику присутні похідні першого порядку за r і r_0 в точках $r, r_0 = 0$, відповідно, а у знаменнику похідна другого порядку за r і r_0 в точках $r, r_0 = 0$. Побудоване таким чином зображення Лапласа $K_1^N(r,s,r_0)$ перехідної ймовірності задовольняє умовам Неймана в точках $r, r_0 = 0$ і визначене на півосі $r, r_0 \geq 0$. Простим обчисленням на основі формул (17) і (19) знайдемо

$$\Delta K_1(r,s,r_0) = \exp\left(\frac{\beta}{2\sigma^2}(r-r_0)(r+r_0-2\mu)\right) \times$$
$$\times \begin{cases} -\dfrac{\Gamma\left(\frac{s}{\beta}\right)}{\sqrt{\pi\beta}\,\sigma} \dfrac{D_{1-\frac{s}{\beta}}\left(\frac{\sqrt{2\beta}\mu}{\sigma}\right)}{D_{1-\frac{s}{\beta}}\left(-\frac{\sqrt{2\beta}\mu}{\sigma}\right)} D_{-\frac{s}{\beta}}\left(\dfrac{\sqrt{2\beta}(r-\mu)}{\sigma}\right) D_{-\frac{s}{\beta}}\left(\dfrac{\sqrt{2\beta}(r_0-\mu)}{\sigma}\right), \ r > r_0 \\ -\dfrac{\Gamma\left(\frac{s}{\beta}\right)}{\sqrt{\pi\beta}\,\sigma} \dfrac{D_{-1-\frac{s}{\beta}}\left(\frac{\sqrt{2\beta}\mu}{\sigma}\right)}{D_{-1-\frac{s}{\beta}}\left(-\frac{\sqrt{2\beta}\mu}{\sigma}\right)} D_{-\frac{s}{\beta}}\left(\dfrac{\sqrt{2\beta}(r-\mu)}{\sigma}\right) D_{-\frac{s}{\beta}}\left(\dfrac{\sqrt{2\beta}(r_0-\mu)}{\sigma}\right), \ r \square r_0 \end{cases} . \quad (20)$$

Тоді зображення Лапласа $K^J(r,s,r_0)$ знайдене на основі $K_1^N(r,s,r_0)$

$$K^J(r,s,r_0) = \exp\left(-\frac{\beta r(r-2\mu)}{\sigma^2}\right) \times$$
$$\times K_1^N(r,s,r_0) \exp\left(\frac{\beta r_0(r_0-2\mu)}{\sigma^2}\right) \quad (21)$$

задовольняє умову рівності нулю потоку ймовірності в точках $r, r_0 = 0$. Відповідно, підставляючи вирази (18) і (19) у (21) отримаємо:

$$K^J(r,s,r_0) = \exp\left(-\frac{\beta r(r-2\mu)}{\sigma^2}\right) \times$$
$$\times K_1(r,s,r_0) \exp\left(\frac{\beta r_0(r_0-2\mu)}{\sigma^2}\right) - \Delta K(r,s,r_0), \quad (22)$$

$$\Delta K(r,s,r_0) = \exp\left(-\frac{\beta r(r-2\mu)}{\sigma^2}\right) \times$$
$$\times \Delta K_1(r,s,r_0) \exp\left(\frac{\beta r_0(r_0-2\mu)}{\sigma^2}\right) . \quad (23)$$

Здійснюючи обернене перетворення Лапласа від (23) отримаємо перехідну ймовірність для моделі Васічека задану на півосі.

$$P^J(r,t,r_0,t_0) = L_s^{-1}\left(K^J(r,s,r_0)\right) . \quad (24)$$

Таким чином формули (18–24) дають розв'язок поставленої задачі – визначають стохастичний опис процентної ставки в моделі Васічека лише для додатних значень випадкової змінної.

У замкнутому вигляді виконати обернене перетворення Лапласа у (24) неможливо. Проте можна визначати середні значення параметрів моделі, досліджувати часову структуру дохідності в певних наближеннях, зокрема в наближенні значної волатильності ($\dfrac{\sqrt{\beta}\mu}{\sigma} >> 1$).

Висновки. Як відомо цінова динаміка різноманітних фінансових інструментів моделюється з допомогою стохастичних процесів. Сюди відносяться як ціноутворення базових активів, різних деривативів пов'язаних з ними, процентних ставок та інше. Проте в ряді моделей змінні можуть набувати значень, що не відповідає економічному змісту фінансових показників. Тому слід вводити певні зовнішні обмеження для змінних моделі. В роботі запропоновано метод коректного введення обмежень для змінних в таких стохастичних моделях. В його основі лежить розгляд розв'язків рівняння Фоккера–Планка із врахуванням умови відбивання на межі, що відділяє область недопустимих значень змінних моделі. Шляхом ряду перетворень зазначена задача зведена до відомої задачі математичної фізики – побудови функції Гріна рівняння з додатковими умовами Неймана. Для моделі Васічека процентної ставки знайдене зображення Лапласа для умовної ймовірності для додатних значень ($r > 0$). Безумовно, модель Васічека, обмежена на піввісь запропонованим методом, демонструє більш складну динаміку порівняно з простою гаусовою динамікою на всій числовій осі. Отримані вирази дозволяють досліджувати параметри моделі, будувати часову структуру дохідності в певних наближеннях, а також чисельними методами. Запропонований метод також може бути використаний для моделювання ліній підтримки та опору у ціновій динаміці акцій. Окреслені задачі будуть предметом подальших досліджень.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики : В 2 т. Т. 1 : Факты, модели. М.: МЦНМО, 2016. 440 с.
2. Джон К. Халл. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты / Джон К. Халл. [Пер. с англ.] – М.: Издательство: Вильямс, 2007. – 1056 с.
3. Люу Ю-Д. Методы и алгоритмы финансовой математики / Ю-Д. Люу. [Пер. с англ.] – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 751 с.
4. P. Wilmott. Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering / P. Wilmott. – John Wiley & Sons, Chichester, 1998. – 739 p.
5. В. С. Янішевський. Рівняння динаміки ціни опціону та моделі квантової механіки / В. С. Янішевський // Журнал фізичних досліджень. – 2014. – Т. 18, № 1. – С. 1005:1-1005:7.
6. Sergii Kuchuk-Iatsenko. Option pricing in the model with stochastic volatility driven by Ornstein–Uhlenbeck process. Simulation / Sergii Kuchuk-Iatsenko, Yuliya Mishura // Modern Stochastics: Theory and Applications. – 2015. – no. 2. – P. 355-369.
7. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках / Гардинер К. В. [Пер. с англ.] – М.: Мир, 1986. – 526 с.
8. H. Kleinert. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics and financial markets / H. Kleinert. – Third edition. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, 2004. – 1932 p.
9. Grosche C. δ-function perturbations and boundary problems by path integration. Annalen der Physik, 1993, vol.2(6), p.557-589.
10. C. Grosche and F. Steiner: Table of Feynman Path Integrals; to appear in Springer Tracts in Modern Physics, 1998. – 449 p.
11. Marc Decaps, Ann De Scheppe, Marc Goovaerts. Applications of delta-function perturbation to the pricing of derivative securities. Physica A, Elsevier, 2004, 342, pp.677-692.
12. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / Абрамовиц М., Стиган И. [Пер. с англ.] – М: Наука, 1979. – 834 с.

REFERENCES:

1. Shiryaev A. N. (2016) Osnovy stokhasticheskoy finansovoy matematiki: V 2 t. T. 1: Fakty, modeli [Essentials of Stochastic Finance: In 2 V. V. 1: Facts, Models]. Moscow: MCCME. (in Russian)
2. Dzhon K. Khall (2007) Optsiony, f'yuchersy i drugie proizvodnye finansovye instrumenty [Options, futures, and other derivatives]. Moscow: Publisher: Williams. (in Russian)
3. Lyuu Yu-D. (2007) Metody i algoritmy finansovoy matematiki [Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, and Algorithms]. Moscow: BINOM. Knowledge Laboratory. (in Russian)
4. P. Wilmott. Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering / P. Wilmott. – John Wiley & Sons, Chichester, 1998. – 739 p.
5. V. S. Janishevs'kyj (2014) Rivnjannja dynamiky ciny opcionu ta modeli kvantovoi' mehaniky [Option price dynamics equation and models of quantum mechanics]. Journal of physical studies. vol. 18, no.1, pp. 1005–1011.

6. Sergii Kuchuk-Iatsenko. Option pricing in the model with stochastic volatility driven by Ornstein–Uhlenbeck process. Simulation / Sergii Kuchuk-Iatsenko, Yuliya Mishura // Modern Stochastics: Theory and Applications. – 2015. – no. 2. – P. 355-369.
7. Gardiner K. V. (1986) Stokhasticheskie metody v estestvennykh naukakh [Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences]. Moscow: Mir. (in Russian)
8. H. Kleinert. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics and financial markets / H. Kleinert. – Third edition. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, 2004. – 1932 p.
9. Grosche C. δ-function perturbations and boundary problems by path integration. Annalen der Physik, 1993, vol.2 (6), p. 557-589.
10. C. Grosche and F. Steiner: Table of Feynman Path Integrals; to appear in Springer Tracts in Modern Physics, 1998. – 449 p.
11. Marc Decaps, Ann De Scheppe, Marc Goovaerts. Applications of delta-function perturbation to the pricing of derivative securities. Physica A, Elsevier, 2004, 342, pp. 677-692.
12. Abramovits M. (1979) Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam [Handbook of mathematical functions] – Moscow: Nauka. (in Russian)